تمرینات

حل معادلات دیفرانسیل با تبدیلات لاپلاس

۱- با استفاده از قضیه‌های گفته شده تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید؟

$$1)\ f(t) = 3t^2 - t^4 + 5$$

$$2)\ f(t) = 6t^3 - t + 2$$

$$3)\ f(t) = 5e^{-2} + 2e^{t}$$

$$4)\ f(t) = 3t^3 - 4e^{2t} - 2$$

$$5)\ f(t) = 3\mathrm{Cos}(2t) - \mathrm{Sin}(3t)$$

$$6)\ f(t) = 4t^2 - 3e^{-2t} + 2\mathrm{Sin}(2t)$$

$$7)\ f(t) = \mathrm{Sin}(at + b)$$

$$8)\ f(t) = 3 + \mathrm{Sin}(2t) - 2\mathrm{Sinh}(t)$$

$$9)\ f(t) = 2e^{3t} + \mathrm{Sinh}(2t) - 2\mathrm{Cosh}(3t)$$

$$10)\ f(t) = \mathrm{Cosh}(at + b)$$

$$11)\ f(t) = t\mathrm{Cosh}(3t)$$

$$12)\ f(t) = \mathrm{Sinh}(4t) - 2t\mathrm{Cos}(2t)$$

$$13)\ f(t) = t\mathrm{Sin}(t) - t^2e^{-t}$$

$$14)\ \int_0^t (r^{2/3} - 6\mathrm{Cosh}(r))dr$$

$$15)\ \int_0^t (r^2 - 2\mathrm{Sin}(r))dr$$

$$16)\ f(x) = e^{-2x}\mathrm{Cosh}(3x)$$

$$17)\ f(x) = e^{x}(x^3 - 2\mathrm{Sin}(3x) + 1)$$

$$18)\ f(x) = u_2(t)(t^2 - 3t + 2)$$

$$19)\ f(t) = u_\pi(t)\mathrm{Sin}(t)$$

$$20)\ f(t) = (t - 4)u_4(t)$$

$$21)\ g(x) = t^2e^{-2t}\mathrm{Sin}(t)$$

$$22)\ \int_0^\infty te^{-3t}\mathrm{Sin}(3t)dt$$

$$23)\ f(t) = \frac{1 - \mathrm{Sinh}(t)}{t}$$

$$24)\ f(t) = \frac{1}{t}(e^{t} - \mathrm{Sin}(t) + 1)$$

$$25)\ f(t) = \frac{\mathrm{Cos}(t) - \mathrm{Cos}(2t)}{t^2}$$

$$26)\ f(t) = \frac{1}{t^2}(e^{-t} + \mathrm{Sin}(t) - \mathrm{Cosh}(2t))$$

$$27)\ f(t) = \int_0^t \lambda^4 e^{2(t-\lambda)}d\lambda$$

$$28)\ f(t) = \int_0^t (u - t)^3 e^{t}dt$$

$$29)\ g(t) = t^2 * \mathrm{Cosh}(t)$$

$$30)\ g(x) = \mathrm{Sin}(2x) * 3$$

$$31)\ f(t) = \begin{cases} t & , 0 \le t < 2 \\ 2 & , t \ge 2 \end{cases}$$

$$۳۲)g(x)=\begin{cases}۲x & ,x<۳\\ x^{۲} & ,x>۳\end{cases}$$

$$۳۳)f(x)=\begin{cases}۰ & ,۰\le x<\pi\\ \cos(x) & ,\pi\le x\le ۲\pi\end{cases},f(x+۲\pi)=f(x)$$

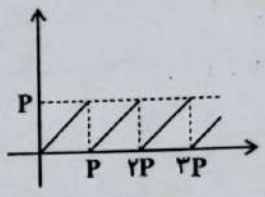
$$۳۴)f(t)=\begin{cases}۰ & ,t<۰\\ ۱ & ,۲n<t<۲n+۱\\ -۱ & ,۲n+۱<t<۲n+۲\end{cases}$$

$$۳۵)f(t)=\sin(t)-u_{\pi}(t)\sin(t-\pi)$$

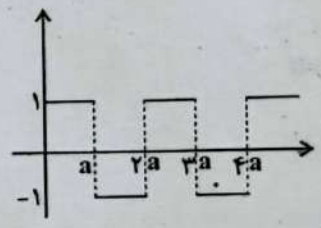
$$۳۶)f(t)=\frac{۱}{t}(t\sin(t)-\cos(t))+\delta(t)$$

$$۳۷)g(t)=u_{\pi}(x)(۱+\cos(x))$$

۳۸)



۳۹)



۲- با استفاده از قضیه‌های گفته شده تبدیل لاپلاس معکوس عبارت‌های زیر را بدست آورید؟

$$۱)F(s)=\frac{۶}{s^{۲}+۲۵}$$

$$۲)F(s)=\frac{۲۰}{s^{۲}-۴}$$

$$۳)F(s)=\frac{۲s^{۲}-۴}{(s+۲)(s-۱)(s+۳)}$$

$$۴)F(s)=\frac{۱}{(s+۲)(s-۱)}$$

$$۵)F(s)=\frac{۳s+۲}{s^{۲}+۲s+۱۰}$$

$$۶)F(s)=\frac{۱}{s^{۲}(s+۱)}$$

$$۷)F(s)=\frac{s+۳}{s^{۴}+s^{۲}}$$

$$۸)F(s)=\frac{۵s-۱}{s(s^{۲}+۱)(s-۱)}$$

$$۹)F(s)=\frac{۲s^{۲}+۴s+۱۶}{s^{۳}+۱۲s^{۲}-۳۶s}$$

$$۱۰)F(s)=\frac{۸-۶s}{۱۶s^{۲}+۹}$$

$$۱۱)F(s)=\frac{۶s^{۲}-۲}{(s^{۲}+۱)^{۳}}$$

$$۱۲)F(s)=\frac{۱}{s^{۳}-۵s^{۲}}$$

$$۱۳)F(s)=\frac{۱}{s^{۴}-۲s^{۳}}$$

$$۱۴)F(s)=\frac{۳s+۱}{(s-۱)(s^{۲}+۱)}$$

$$۱۵)F(s)=\frac{۱}{s^{۳}(s-۲)}$$

$$۱۶)F(s)=\frac{s^{۲}}{(s^{۲}+۱)^{۲}}$$

$$۱۷)F(s)=\frac{۴-۵s}{s^{۳/۲}}$$

$$۱۸)F(s)=\frac{۱}{s^{۲}(s^{۲}-s+۱)}$$

$$۱۹)F(s)=\frac{۲e^{-۲s}}{s^{۲}-۴}$$

$$۲۰)F(s)=\frac{e^{-\pi s}}{(۱+s)^{۲}+۱}$$

$$۲۱)F(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^{۲}+۴s+۲۰}$$

$$۲۲)F(s)=\frac{۲}{s^{۲}}+s^{-۴/۳}$$

$$۲۳)F(s)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۲}{s^{۲}+۴}+\frac{s}{s^{۲}+۴}\right)$$

$$۲۴)F(s)=\frac{۳}{s}+\frac{۲e^{-s}}{s^{۲}}+\frac{e^{-۳s}}{s}$$

$$۲۵)F(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s}+e^{-۲\pi s}\frac{s}{s^{۲}+۱}$$

$$۲۶)F(s)=\ln(۱+\frac{۱}{s})$$

$$۲۷)F(s)=\frac{۱}{s-۱}\ln(\frac{s}{s+۱})$$

$$۲۸)F(s)=\ln(\frac{s^{۲}+۱۶}{s^{۲}})$$

$$۲۹)F(s)=tg^{-۱}(s+۴)$$

$$۳۰)F(s)=\frac{s}{s^{۲}+۱}Cot^{-۱}(s+۱)$$

۳- با استفاده از تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل‌ها را با مقادیر اولیه داده شده، بدست آورید؟

$$۱)f''(t)+۸f'(t)+۶f(t)=۰$$

$$f(۰)=۲,f'(۰)=۱,f(t)=?$$

$$۲)\ y'''-my''+m^{۲}y'-m^{۳}y=۰$$

$$y(۰)=y'(۰)=۰,y''(۰)=۱,m>۰,y(۲\pi)=?$$

$$۳)\ y''+۲y'+y=۳xe^{-x}$$

$$y(۰)=۴,y'(۰)=۲,y(t)=?$$

$$۴)\ xy''+y'+xy=۰$$

$$y(۰)=۱\ ,\ y'(۰)=۰$$

$$۵)\ xy''+y'+xy=۰$$

$$y(۰)=۱\ ,\ y'(۰)=-۱$$

$$۶)\ y''+۲y'+y=t\delta_{۲}(t)$$

$$y(۰)=y'(۰)=۱$$

$$۷)\ y'-۲y'-۳y=۰$$

$$y(۰)=y'(۰)=۷\ ,\ y(t)=?$$

$$۸)\ y''-۵y+۲y'=te^{-۲t}$$

$$y(۰)=۱\ ,\ y'(۰)=۲\ ,\ y(۱)=?$$

$$۹)\ y''+۹y=\sin(۲t)$$

$$y(۰)=۱\ ,\ y'(۰)=۱\ ,\ y(t)=?$$

$$۱۰)\ y''-۳y'+۲y=۲e^{-t}$$

$$y(۰)=۲\ ,\ y'(۰)=-۱\ ,\ y(t)=?$$

۴- دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید؟
(هر کجا که شرایط داده نشده باشد باید آن را به صورت پیش فرض صفر در نظر بگیریم)

$$۱)\begin{cases}y_{۱}'+y_{۱}=y_{۲}'+y_{۲}\\ y_{۱}''+y_{۲}''=e^{t}\end{cases}$$

$$y_{۱}(۰)=۰\ ,y_{۱}'(۰)=۱\ ,y_{۲}(۰)=۱,y_{۲}'(۰)=۰$$

$$۲)\begin{cases}y_{۱}'+y_{۲}'=۲Sinh(t)\\ y_{۲}'+y_{۳}'=e^{t}\\ y_{۳}'+y_{۱}'=۲e^{t}+e^{-t}\end{cases}$$

$$y_{۱}(۰)=۱\ ,y_{۲}(۰)=۱\ ,y_{۳}(۰)=۰$$

$$۳)\begin{cases}x'+۲x+۳y=۰\\ ۳x+y'+۲y=۲e^{۲t}\end{cases}$$

$$x_{(t)}=?\ ,y_{(t)}=?$$

$$۴)\begin{cases}۲x_{(t)}+y_{(t)}=x_{(t)}'\\ -۴x_{(t)}+۲y_{(t)}=y_{(t)}'\end{cases}$$

$$x_{(t)}=?,y_{(t)}=?$$

$$۵)\begin{cases}tx+y'=Cos(t)\\ x'+y=Sin(t)\end{cases}$$

$$x_{(۰)}=y_{(۰)}=۰\ ,x_{(t)}=?\ ,y_{(t)}=?$$

۵- حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید؟

$$1)\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{x}dx \quad , \quad (a>0, b>0)$$

$$2)\int_0^\infty te^{-t}\mathrm{Sin}(2t)dt$$

$$3)\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\mathrm{Sin}(3x)}{x}dx$$

$$4)\int_0^\infty \int_0^x e^{-6t+x}\mathrm{Cos}(t)dtdx$$

$$5)\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}(t)-\mathrm{Cos}(2t)}{t}dt$$

$$6)\int_0^\infty xe^{-2x}\mathrm{Cos}(\beta x)dx$$

$$7)\int_0^\infty e^{-x}\frac{\mathrm{Sin}(x)}{x}dx$$

$$8)\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}(t)}{t}dt$$

$$9)\int_0^\infty e^{-4t}\frac{1-\mathrm{Sinh}(bt)}{t}dt$$

$$10)\int_0^{2\pi}\mathrm{Sin}(x)e^{2ix}\frac{x^2}{x-1}\delta(x-\pi)dx$$

۶- با استفاده از تبدیلات لاپلاس جواب معادله‌های انتگرالی زیر را تحت شرایط اولیه داده شده، بدست آورید؟

$$1)\frac{d^2u}{dx^2}=e^{2x}-\int_0^x e^{2(x-t)}\frac{du}{dt}.dt$$

$$u(0)=0 \quad , u'_{(0)}=0$$

$$2)y'_{(t)}+\int_0^t y(u)\mathrm{Cos}(t-u)du=\mathrm{Cos}(t) \quad , y_{(0)}=0$$

$$3)y'_{(t)}+2y+\int_0^t y_{(x)}dx=0$$

$$4)y_{(t)}=1+\int_0^t y_{(x)}\mathrm{Sin}(t-x)dx$$

$$5)f_{(x)}+2\int_0^x \mathrm{Cos}(x-t)f_{(t)}dt=e^{-x}$$

$$6)y'_{(t)}+2y_{(t)}+\int_0^t y_{(z)}dz=0 \quad ,y_{(0)}=1$$

$$7)f_{(t)}=te^{-t}+\int_0^t \alpha f(t-\alpha)e^{-\alpha}d\alpha$$

$$8)y_{(t)}+\int_0^t (t-\lambda)y(\lambda)d\lambda=\mathrm{Sin}(2t)$$

$$9)y_{(x)}=x+e^x\int_0^x y_{(t)}e^{-t}dt$$

$$10)y_{(t)}=t^2+\int_0^t \mathrm{Sin}(t-\lambda)y(\lambda)d\lambda$$