آمار و احتمالات مهندسی / امید ریاضی

Concept of Expectation Value

استاد:

دکتر علیرضا امیری اسفرجانی

بسم الله الرحمن الرحيم

آمار و احتمالات مهندسی /

Concept of Expectation Value

استاد:
لتر علیرضا امیری اسفرجانی

Concept of Expectation Value

- این شاخص می‌تواند «امید ریاضی» باشد. یادآور می شویم که گاهی به امید ریاضی «مقدار مورد انتظار» نیز می‌گویند.

Expected Value

تاریخچه

ایده اصلی مطرح شده در مورد امید ریاضی به سال‌های دور برمی‌گردد.

زمانیکه **بلز پاسگال** (Blaise Pascal) دانشمند و ریاضیدان فرانسوی در سال ۱۶۵۴ به مسئله ای با موضوع بازی‌های شانسی برخورد کرد.

او می‌خواست متوسط درآمد فردی که در چنین بازی شرکت می‌کند را محاسبه کرده و مشخص کند در صورتی که فرد در تعداد زیادی از این بازی شرکت کند، آیا سود نصیبش خواهد شد و یا زیان هنگفتی خواهد کرد.

او همچنین به میزان دارایی که بازیکن در هر مرحله صرف کرده توجه داشت و آن را به عنوان پارامتری در حل این مسئله در نظر گرفت.

از آنجاییکه بازی به صورت شانسی برنده یا بازنده را مشخص می‌کند، او اجبار به دخیل کردن احتمال در چنین محاسباتی داشت؛ در نتیجه با همکار خود پیر دو فورمات (Pierre de Fermat) دیگر دانشمند فرانسوی در این زمینه مشورت کرد و هر یک با دو شیوه مختلف به نتیجه یکسانی رسیدند.

آن‌ها نتایج یافته‌هایشان را منتشر نکردند و نامی نیز برای نتیجه محاسبات خود انتخاب نکردند.

سال‌ها بعد پیر لاپلاس (Pierre Laplace) در ۱۸۱۴ طی مقاله ای به مفهوم کامل و روشنی از امید ریاضی پرداخت.

انتخاب علامت امید ریاضی که بصورت حرف «E» نمایش داده می‌شود نیز از ابتکارات ویتورت (Whitworth) ریاضیدان انگلیسی است.

مثال ۱

فرض کنید فردی در یک بازی شانسی شرکت کرده است؛ احتمال برد او ۰.۲ است و در نتیجه احتمال اینکه ببازد نیز برابر با ۰.۸ است. همچنین فرض کنید که در صورت برنده شدن به وی مقدار ۱۰۰ تومان داده می‌شود. ضمنا اگر بازی را ببازد، باید مبلغ ۱۰ تومان جریمه پرداخت کند. به نظر شما او در این بازی نفع خواهد برد یا ضرر خواهد کرد؟

پاسخ مثال

برای پاسخ به این سوال باید متوسط دریافت یا پرداخت های او را محاسبه کنیم. این کار را به واسطه محاسبات زیر انجام می‌دهیم. از آنجاییکه ۰.۲ احتمال دارد که ۱۰۰ تومان برنده شود، به نظر می‌رسد اگر وارد بازی شود ۲۰=۰.۲×۱۰۰ تومان درآمد خواهد داشت. از طرفی در چنین وضعیتی ممکن است ۰.۲= ۰.۸×۱۰ تومان جریمه شود. بنابراین بطور متوسط در هربار بازی، احتمال دارد ۱۲ تومان درآمد کسب کند.

$$۱۰\times ۰.۸ - ۱۰۰\times ۰.۲ = ۱۲$$

حال فرض کنید که X متغیر تصادفی باشد که مقدار a را به عنوان مبلغ جایزه و (-b) را به عنوان جریمه دریافت می‌کند. احتمال کسب جایزه برابر با P و احتمال جریمه نیز برابر با P-۱ است. در نتیجه مقدار متوسط به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a\times p+(-b)\times(1-p)$$

بنابراین اگر X را با تکیه‌گاه $S=\{ X_1, X_2, ..., X_n \}$ در نظر بگیریم و احتمال مشاهده هر یک از مقدارهای تکیه گاه نیز توسط تابع احتمال P معرفی شده باشد، متوسط مقدار متغیر تصادفی X که آن را با E(X) نشان می‌دهیم برابر خواهد بود با:

$$E(X)=n\sum i=1P_i\, x_i$$

روابط امید ریاضی

$$E = \mu = \sum x_i \, f(x_i)$$

$$E = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) dx$$

شرط وجود امید ریاضی

Expected value exists when:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, f_f(x) < \infty$$

Linearity property of expectation

2 RVs X and Y and Z=X+Y we have:

E[Z]=E[X+Y]=E[X]+E[Y] ???

$$E[X+Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}\,(x,y)\,dy\,dx+\int_{-\infty}^{\infty} y\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_x\,dx+\int_{-\infty}^{\infty} y f_y\,(y)\,dy=E[X]+E[Y]$$

As we see being independent was not mentioned at all in this proof.

This relation is true for n random variables too and it is called linearity property of expectation.

مثال

امید ریاضی توزیع احتمال زیر را بدست آورید.

X	1	2	3	-4	5
F(X)	0.1	0.1	0.4	0.2	0.2

حل

$$f_x(x) = f(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2(x+1)} & x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

حل

مثال

چگالی احتمال زیر را درنظر گرفته و مقدار امید ریاضی آن را بدست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 1<x<2 \\ 0 & \text{بقیه نقاط} \end{cases}$$

حل

مثال

در یک بازی یک تاس سالم همزمان با یک سکه سالم پرتاب می‌شود. اگر نتیجه سکه شیر باشد، بازیکن دو برابر عدد مشاهده شده برروی تاس و اگر نتیجه خط باشد، نصف عدد مشاهده شده روی تاس برنده می‌شود. متوسط مقدار برد را بدست آورید؟

حل

مثال

تاس سالمی ۱۰ بار پرتاب می‌شود. امید ریاضی مجموع ۱۰ پرتاب را محاسبه کنید؟

حل

مثال

نقطه ای به تصادف در داخل یک دایره به شعاع ۲ و مرکز ۳ انتخاب می‌شود. اگر فاصله این نقطه تا مرکز با متغیر X نشان داده شود امید ریاضی X را محاسبه کنید؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

حل

مثال

یک مجموعه ۱۰۰ کارتی که از ۱ تا ۱۰۰۰ شماره‌گذاری شده است، بین ۱۰۰۰ نفر توزیع می‌شود. متوسط (امید ریاضی) تعداد کارت های داده شده به افراد که سن آن‌ها با شماره کارت داده شده انطباق دارد را محاسبه کنید؟

حل

مثال

اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، $\mathrm{E} = [(X-Y)^2]$ را پیدا کنید.

حل

مثال

در بررسی حادثه رانندگی در یک جاده در بازه ساعت دوازده بامداد تا چهار صبح امید تصادف نکردن با رابطه زیر تعیین شود، امید E(5x-4) را حساب کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}\sqrt{x} & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{بقیه نقاط} \end{cases}$$

حل

مثال

اگر ۱۰۱ قلم جنس بین ۱۰ جعبه توزیع شوند، آنگاه یک جعبه باید بیش از ۱۰ قلم جنس داشته باشد. با بکارگیری روش احتمالی، این نتیجه را اثبات کنید.

حل

✓ تمرین

Moments

For Y=g(X) expected value is calculated as:

$$f(x) = \begin{cases} \sum_i g(x_i)p(x_i) & for\ discrete\ RV \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_x(x)dx & for\ continuous\ RV \end{cases}$$

In a special case which g(X)=x^k k = 1,2,… , E[g(X)] which means $E\left[X^k\right]$ is called k^{th} moment of random variable X.

Moments

When X and Y are equal in all of their different moments , i.e. :

$$E\left[X^k\right] = E\left[Y^k\right] \qquad k = 1,2,3, \dots$$

We can conclude that X and Y follow the same distribution. Now assume $x_1, x_2, \dots, x_n$ are random variables that are not necessarily independent we define random variable Y such that $Y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Expected value of Y can be found as below:

$$\mathrm{E}[Y] = E[g(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

$$= \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} g(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n)\, p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \ \dots dx_n \end{cases}$$

Example2

Assume a hard disk, each hard disk contains some concentric rings each ones diameter is bigger than the previous one as ε. Diameters of these rings are so close to each other so when they are put together, they make matter . Each hard disk contains a head which is responsible for reading data.

Assume diameter of the biggest ring is b and the smallest one is a so the head must move from a to b. we define 2 random variables X and Y as X:current place of the head and Y:place that head should go to next.

These 2 RVs are independent from each other and are uniform from a to b. for reading new data head must traverse |X~Y| and this is a new RV. Calculate its expected value.

✓ تمرین

Example

In the previous example since the maximum distance that head must traverse is b~a and a and b are uniformly distributed it seems that distance's expected value is $\frac{b-a}{2}$ but we will show that is not true.

We know: $f_x(x) = f_y(y) = \frac{1}{b-a}$ a<x, y<b

We first find $f_{x,y}(x,y) since\ X\ and\ Y\ are\ independent\ so$:

$$f_{x,y}(x,y) = f_x(x).f_y(\mathrm{y}) = \frac{1}{(b-a)^2}$$

Now we calculate expected value of |X~Y|:

Example

$$E[|X-Y|] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x-y|\, f_{x,y}(x,y) = \int_a^b \int_a^b |x-y| \frac{1}{(b-a)^2}$$

$$= \int\int_{a\le y<x\le b} \frac{x-y}{(b-a)^2}\, dy\, dx + \int\int_{a\le x<y\le b} \frac{y-x}{(b-a)^2}\, dy\, dx$$

$$= \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^x (x-y)\, dy\, dx = \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_a^x dx$$

$$= \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b \left(x^2 - ax - \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{2}{(b-a)^2}\left[\frac{b^3-a^3}{6} - \frac{a}{2}\left(b^2-a^2\right) + \frac{a^2}{2}(b-a)\right] = \frac{b-a}{3}$$

Example

We shall remind that when multiplying 2 RVs X and Y if they are independent from each other we have: $E[XY]=E[X]E[Y]$ Otherwise writing a simple formula is not possible .

We also should notice whenever this equation is true, does not mean that X and Y are independent

Variance

As mentioned before average dispersion of RV from its expectation value is called variance.

This value can be calculated from the formula before.

In this formula $\mu = E[X]$. Variance is usually shown as σ^2 *an its* square root (σ) is called standard deviation.

$$var(x) = E[(x-\mu)^2]$$

$$var(x) = \sigma^2 = \begin{cases} \sum_i (x_i - E[X]^2\, p(x_i) & discreteRV \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_x\,(x)\, dx & continuos\ RV \end{cases}$$

Since expected value may not exist for a RV, variance may not exist too.

Variance(cont.)

Since expected value has linearity property we have:

$$var(X) = \sigma^2 = E\left[(x - E[X])^2\right] = E[x^2 - 2xE[X] + E[X]^2]$$

$$= E[x^2] - 2E\left[xE[X]\right] + E[X]^2 = \mathrm{E}[x^2] - 2\mathrm{E}[X]E[X] + E[X]^2$$

$$= E[x^2] - E[X]^2$$

Now we want to calculate variance of sum of 2 RVs:

$$var(x = y) = E[(x + y - E[x + y]^2)] = E[(x + y - E[x] - E[y]^2]$$

$$= E[((x - E[x]) + (y - E[y]))^2]$$

$$= E\left[x - E[x]\right]^2 + E\left[y - E[y]\right]^2 + 2(x - E[x])(y - E[y]) =$$

Variance(cont.)

$$= E[(x - E[x]^2] + E[(y - E[y]^2] + 2E[(x - E[x])(y - E[y])]$$

$$= var(x) + var(y) + 2E[(x - E[x])(y - E[y])]$$

When X and Y are independent: var(x+y)=var(x)+var(y) Otherwise E[(x-E[x])(y-E[y])] remains and it is called covariance and is shown as cov(x,y). When cov(x,y)>0 means X and Y have similar acting i.e. when X is increasing, Y increases too and when X is decreasing Y decreases too. When cov(x,y)<0 it means X and Y have opposite acting and when cov(x,y)=0 means they are not related to each other and are uncorrelated.

Variance

We want to prove when X and Y are independent, cov(x,y)=0:

$$cov\,(x,y) = E\big[(x - E[x])(y - E[y]\big]$$

$$= E\,\big[xy - xE[y] - yE[x] + E[x]E[y]\big]$$

$$= E[xy] - E[x]E[y] = 0$$

We can use this formula to calculate covariance:

Cov(x,y)=E[xy]-E[x]E[y]

As we see for 2 independent RVs, variance of their sum will be sum of their variance otherwise it is equal to sum of variance of 2 RVs plus their covariance multiplied by 2.

Variance(cont.)

$$var\,(x + y) = var\,(x) + var\,(y) + 2cov\,(x,y)$$

In case of independent RVs, this formula is extendable for n RVs.

Assume independent random variables $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$var(x_1 + x_2 + \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} var(x_i)$$

We shall mention that we call 2 random variables X and Y uncorrelated when cov(x,y)=0.2 independent RVs are uncorrelated but revers of this statement is not necessarily true.

Example

Assume random variable X which is a uniform RV on (~1,1) interval. We define Y such that $Y = x^2$. So Y is totally related to X . Calculate cov(X,Y).

Answer:

$$cov\ (x,y) = E\ [xy] - E[xy] - E[x]E[y]$$

Also: $E[X.Y] = E[X.X^2] = E[X^3] = 0$

$E[X] = 0 \Rightarrow cov(X,Y) = 0 - 0 = 0$

As we saw X and Y are not independent but their covariance is zero.

Correlation

As we mentioned before covariance shows how X and Y act comparing to each other but value of covariance does not give us any noticeable sense. So we declare another concept called correlation. Correlation which is shown as $\rho(x,y)$ can have values between ~1 to 1.

We can prove that $0 \leq cov^2\ (x,y) \leq var\ x\ var(y)$ Correlation coeffiecient can be calculated as:

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)var(y)}} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} - 1 \leq \rho(x,y) \leq 1$$

Correlation(cont.)

Like covariance , when correlation coefficient is positive 2 RVs have the same acting and when it is negative they have opposite acting and when it is zero their behavior is not related to each other. The bigger correlation coefficient is, the more related RVs are.

Example

Using correlation's definition prove that $-1 \leq \rho(x,y) \leq 1$.

Answer:

We first prove that this value is bigger than ~ 1:

Since variance is non-negative we have:

$$0 \leq var\left(\frac{x}{\sigma_x} + \frac{y}{\sigma_y}\right) = \frac{var(x)}{\sigma_x^2} + 2\frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = 2\left[1 + \rho(x,y)\right] \Rightarrow -1 \leq \rho(x,y)$$

Example

Now we will prove it is bigger than 1:

$$0 \leq var\left(\frac{x}{\sigma_x} - \frac{y}{\sigma_y}\right) = \frac{var(x)}{\sigma_x^2} + \frac{var(y)}{(-\sigma)^2} - \frac{2cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = 2[1 + \rho(x,y)] \Rightarrow -1 \leq \rho(x,y)$$

Conditional expectation

As mentioned in the previous chapter conditional probability is defined as below:

$$\begin{cases} P_{(x|y)}(x|y) = \dfrac{P_{x,y}(X = x, Y = y)}{P_y(y)} & discrete \\ f_{(x|y)}(x|y) = \dfrac{f_{x,y}(x, y)}{f_y\,(y)} & continuous \end{cases}$$

Since conditional probability has distribution function, we can calculate its expected value.

Conditional expectation(cont.)

$$E[x|\,y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{(x|y)}\,(x|y)\,dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f_{x,y}\,(x,y)\,dx}{f_y(y)}$$

If we write expected value conditioned to Y=y for all Ys we will have a function called regression of X on Y:

$$m(y) = E[X|\,Y]$$

We have: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E\,[x|Y = \ y] = f_y(y)dy$

This formula is so useful and is called as theorem of total expectation. It is obvious that these formulas can be used for discrete RVs too.

Conditional expectation(cont.)

If we have a function of X instead of X, Z=g(X) then we will have:

$$E[Z|\, y] = E[g(X)|\, y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{(x|y)}\ (x|y)\, dx$$

Now if we calculate expected value of regression function:

$$E[m(y)] = E\big[E[x|\, Y]\big] = E[x] \Rightarrow E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} E[x|\, y] f_y(y) dy$$

In order to prove this we have:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} E[x|\, Y = y] f_y(y) dy$$

Example

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{(x|y)}\ (x|y) f_y(y)\, dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}\ f_y(y)\, dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{x,y}(x,y)\ dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\ dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_x\,(x) dx = E[x]$$

Example

Assume random variable X which indicates time of failure of a system. Average time for a system failure which is indicated by MTTF changes with temperature. We assume conditional distribution of MTTF conditioned to temperature T=t is:

$$MTTF\ (t) = E[Y|\ T = t] = \exp\left(a + bt + ct^2\right)$$

A, b and c are constant values and have been calculated by experiment: c=-0.00036 , b=0.00442 , a=0.973

T is a random variable following normal distribution with parameters μ = 40 and σ = 20 so density function of temperature is:

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-(\frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma})\right]$$

Answer:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} MTTF(t) f_T(t) dt$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{a+tb+ct^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left[-(\frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma})^2\right] dt$$

$$E[Y] = \frac{exp\left[a + \frac{(b\sigma)^2}{2} + b\mu + c\mu^2\right]}{\sqrt{1} - 2c\sigma^2} = 1.58$$

مثال‌های اضافه

محموله‌ای شامل ۱۵ دستگاه رایانه می‌باشد که ۵ تای آنها معیوب می باشند اگر ۳ رایانه برای خرید انتخاب شوند به طور متوسط چند دستگاه معیوب می توان انتظار داشت؟

اگر X را تعداد معیوب ها در نظر بگیریم:

x={ 0, 1, 2, 3}

x	0	1	2	3
F(X)	$\frac{24}{91}$	$\frac{54}{91}$	$\frac{20}{91}$	$\frac{2}{91}$

مثال

مقدار مورد انتظار و واریانس متغیر تصادفی X که چگالی احتمال آن داده شده است را به دست آورید؟

$$F(X)=\begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

مثال

اگر X متغیر تصادفی با E(X)=3 و $E(x^2) = 13$ باشد با استفاده از نامساوی چپشیف یک کران برای احتمال زیر ارائه دهید؟

P(-2<x<8)

مثال

یک کتاب بازی های برد و باخت، راهبرد برد را در یک بازی به صورت زیر تجویز می‌کند.

این کتاب پیشنهاد می‌دهد که یک بازیکن ۱ دلار روی رنگ قرمز شرط بندی کند، اگر رنگ قرمز ظاهر شود (که احتمال دارد) آنگاه وی ۱ دلار جایزه اش را بردارد و متوقف شود.

اگر او بازنده شود (که احتمال دارد) آنگاه وی ۱ دلار دلار جایزه اش را بر دارد و متوقف شود .

مثال

یک موسسه بیمه، بیمه نامه‌ای را می‌نویسد که اگر طول یکسال حادثه E اتفاق افتد، باید مبلغ A را پرداخت نماید.

اگر شرکت بیمه برآورد کند که پیشامد E با احتمال P در طول یکسال اتفاق می‌افتد، چه مقدار باید حق بیمه را تنظیم نماید تا متوسط سود شرکت تا ۱۰ درصد مبلغ A باشد؟

توجه

وقتی در یک آزمایش می‌گوییم امید ریاضی متغیر X (X نشان دهنده تعداد دفعات وقوع یک پیشامد است) برابر $\frac{1}{3}$ است، منظور این نیست که هر ۳ آزمایش حتما یک آزمایش نتیجه X را می‌دهد بلکه به این معنی است که اگر این آزمایش به تعداد دفعات زیاد انجام گیرد، آنگاه میانگین تعداد دفعات به دست آمدن نتیجه X برابر $\frac{1}{3}$ است.

لذا در بازی فوق (در هیچ بازی دیگری) نمی‌توان گفت که یک بار بازی میزان برد برابر E(X) است. یعنی در جواب قسمت الف منفی است.

همچنین گفته شده که در عمل، احتمال برنده شدن شخصی به اندازه 2^k برای مقادیر نه چندان بزرگ K تقریبا صفر است. یعنی حتی اگر بازی را به تعداد دفعات زیاد انجام دهیم در عمل میانگین برد عدد بزرگی نخواهد شد، لذا باز هم نمی‌توان رقم بزرگی را برای شرکت در هر مرتبه بازی پرداخت.

سوال

بررسی کنید که کفایت (بسندگی) امید ریاضی بعنوان یک معیار مرکزی، تا چه حدی است؟

مثال

هر شب هواشناس‌های متفاوت احتمال اینکه روز بعد باران بیاید را اعلام می‌کنند. برای قضاوت میزان صحت پیش بینی آنها به هر یک از آنها امتیازهایی به شرح زیر اختصاص می‌دهیم.

اگر هواشناس بگوید که فردا با احتمال P باران می‌آید آنگاه امتیاز او عبارت است از:

اگر باران ببارد $1-(1-P)^2$

اگر باران نبارد $1-P^2$

سپس امتیازهای او را برای یک مدت معین جمع آوری نموده و فردی که بالاترین امتیاز را کسب کرده باشد بهترین هواشناس شناخته می‌شود. فرض کنید یک هواشناس از این مطلب اطلاع دارد و بنابراین می‌خواهد امید ریاضی امتیاز خود را حداکثر نماید. اگر این فرد واقعا معتقد باشد که فردا با احتمال P باران می‌بارد،P را باید اعلام کند تا ریاضی امتیاز او حداکثر شود؟

مثال

برای بررسی اینکه یک گروه ۱۰۰ نفری دارای بیماری معینی هستند یا خیر آنها را مورد آزمایش خون قرار می‌دهیم. بدین ترتیب که آن‌ها را در گروه‌های ۱۰ نفری تقسیم نموده و نمونه خون هر ۱۰ نفر را با هم و بطوری یکجا آزمایش می‌کنیم. اگر نتیجه آزمایش منفی باشد یک آزمایش برای این ۱۰ نفر کافی بوده است درحالیکه اگر نتیجه مثبت باشد، هر کدام از افراد بطور جداگانه نیز آزمایش می‌شوند و جمعا ۱۱ آزمایش انجام می‌گیرد.

فرض کنید احتمال اینکه فردی این بیماری را داشته باشد برای همه افراد به طور مستقل برابر ۰.۱ باشد. امید ریاضی تعداد آزمایش های لازم برای هر گروه را به دست آورید. (توجه کنید که فرض بر این است که وقتی نتیجه آزمایش مثبت است، حداقل یک نفر دارای بیماری است)

حل

اگر متغیر تصادفی Y تعداد آزمایش‌های لازم برای هر گروه باشد می‌تواند مقادیر ۱ و ۱۱ را به ترتیب با احتمال‌های $(0.9)^{10}$ و $1-(0.9)^{10}$ اختیار کند لذا:

مثال

جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۵ مهره آبی است، دو مهره را به تصادف خارج می‌کنیم. اگر مهره‌ها از یک رنگ باشند آنگاه ۱.۱ دلار جایزه می‌گیریم و اگر از رنگ‌های متفاوت باشند ۱ دلار جریمه می‌شویم.

مطلوب است:

الف) امید ریاضی مبلغی که برنده می‌شویم.

ب) واریانس مبلغی که برنده می‌شویم.

نتیجه گیری

از توجه شما متشکرم!!!!