فصل ۲۰

دیدگاه‌های آماری در طراحی

Scanned by CamScanner

از آنجا که در طراحی اجزاء ماشین همواره به پارامترهایی برمی‌خوریم که مقدار آنها دستخوش تغییر است، نیاز به دیدگاه‌های آماری در طراحی داریم. برای مثال، محصولاتی مانند خودرو، ساعت، چمن‌زن، ماشین لباسشویی که به طور انبوه تولید می‌شوند دارای عمر متغیر هستند. یک خودرو ممکن است دارای نواقص زیادی باشد به گونه‌ای که در نخستین ماههای کار آن نیاز به تعمیرات مکرر داشته باشد، در حالی که خودرو دیگری ممکن است برای سالهای متمادی به نحو قابل قبول و بدون نیاز به تعمیرات اساسی و با کمترین نگهداری کار کند.

روشهای کنترل کیفیت، ریشه عمیقی در کاربردهای آماری دارند، و مهندسان طراح برای پیروی از استانداردهای کنترل کیفیت نیاز به آگاهی از علم آمار دارند. تغییرپذیری ذاتی در مقوله‌های «حدود و انطباقات»*، تنش و استحکام، لقی یاتاقانها، و ده‌ها مشخصه دیگر بایستی برای کنترل صحیح به صورت عددی بیان شوند. برای کارکرد قابل قبول یک محصول تنها کافی نیست که بگوییم «انتظار می‌رود این محصول دارای یک عمر طولانی و بدون دردسر باشد»، بلکه برای دستیابی به یک کیفیت مورد نظر بایستی مفاهیمی مانند عمر محصول و قابلیت اعتماد آن به صورت عددی بیان شوند. همانگونه که در بخش ۱-۱۰ نیز خاطر نشان کردیم، موارد عدم قطعیت بسیار فراوانند و نیازمند بررسی کمّی هستند. جبر اعداد حقیقی به تنهایی مناسب بیان وجود تغییرات نیست.

* limits and fits

روشن است که پدیده‌ها در طبیعت پایدارند، البته نه از نظر مقدار، بلکه از نظر الگوی تغییرات. شواهدی که به وسیله اندازه‌گیری پدیده‌های طبیعی گردآوری شده‌اند آمیزه‌ای از اثرات قانونمند و اثرات تصادفی را نشان می‌دهند. در این میان، نقش آمار جدا کردن این دو اثر، و نشان دادن نقاط تاریک مسئله از طریق بکارگیری منطقی داده‌هاست.

بعضی از دانشجویان، این کتاب را پس از گذراندن درس آمار شروع می‌کنند، و برخی دیگر تنها در لابلای دروس مهندسی با مبحث آمار برخورد داشته‌اند. این اختلاف در پیش‌نیازهای درسی، به همراه محدودیتهای مکانی و زمانی موجب می‌شود که ارائه یک مبحث جامع و فراگیر از کاربرد آمار در طراحی مهندسی مکانیک در این مرحله کار بسیار مشکلی باشد. پس از گذراندن دروس اولیه در زمینه‌های طراحی مکانیکی و آمار مهندسی، دانشجویان می‌توانند در قالب یک درس ثانوی (مانند درس روشهای طراحی مهندسی) شروع به یک جمع‌بندی معنی‌دار از این دو زمینه نمایند.

هدف این فصل، ارائه برخی مفاهیم آماری مرتبط با مبحث قابلیت اعتماد* در طراحی است.

* reliability

۲۰-۱ متغیرهای تصادفی

فرض کنید برای اندازه‌گیری استحکام یک نوع فولاد خاص، مثلاً فولاد سرد کشیده UNS G ۱۰۲۰۰، مجموعه‌ای شامل ۲۰ نمونه آزمایش کشش که به طور تصادفی از یک محموله از این نوع فولاد انتخاب، و سپس ماشینکاری شده‌اند، تهیه کرده‌ایم. منطقی است انتظار داشته باشیم که تفاوتهایی بین استحکام کششی نهایی S_{ut} برای نمونه‌های مختلف وجود داشته باشد. این اختلافها ممکن است ناشی از تفاوت در اندازه نمونه‌ها، استحکام مادهٔ آنها، و یا هر دو این موارد باشد. چنین آزمایشی را یک آزمایش تصادفی* گویند، چرا که نمونه‌ها به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند. استحکام S_{ut} که از این آزمایش تعیین می‌شود را یک متغیر تصادفی* می‌نامند. بنابراین، یک متغیر تصادفی یک کمّیت متغیر مانند استحکام، اندازه یا وزن است که مقدار آن بستگی به نتیجه یک آزمایش تصادفی دارد.

* random experiment
* random or stochastic variable

اینک، یک متغیر تصادفی مانند x را به صورت مجموع اعداد حاصل از پرتاب همزمان دو تاس تعریف می‌کنیم. هر یک از تاس‌ها می‌توانند اعداد ۱ تا ۶ را نمایش دهند. شکل ۲۰-۱ تمامی حالتهای ممکن در فضایی موسوم به فضای نمونه* را نمایش می‌دهد. توجه کنید که x دارای یک مقدار خاص برای هر یک از حالتهای ممکن است. برای مثال، در پیشامد (۴ و ۵) مقدار $x = ۵ + ۴ = ۹$ است. خوب است که یک جدول تنظیم کنیم تا مقادیر x متناظر با مقادیر احتمالی x را که با نماد $p = f(x)$ نشان می‌دهیم به نمایش بگذارد. این کار را به راحتی می‌توان به کمک شکل ۲۰-۱ انجام داد. فقط بایستی دو عدد حاصل را با هم جمع کنیم و سپس، برای تعیین اینکه یک مقدار خاص x چند بار تکرار شده است، کافیست این مقدار را بر تعداد کل پیشامدها تقسیم کنیم. نتایج در جدول ۲۰-۱ نشان داده شده‌اند. هر جدولی مانند این، که فهرست مقادیر ممکن یک متغیر تصادفی و احتمالهای متناظر با آنها را در خود داشته باشد، جدول توزیع احتمال* نامیده می‌شود.

* sample space

* probability distribution

شکل ۲۰-۱
فضای نمونه که نشانگر تمامی حالتهای ممکن در پرتاب همزمان دو تاس است.

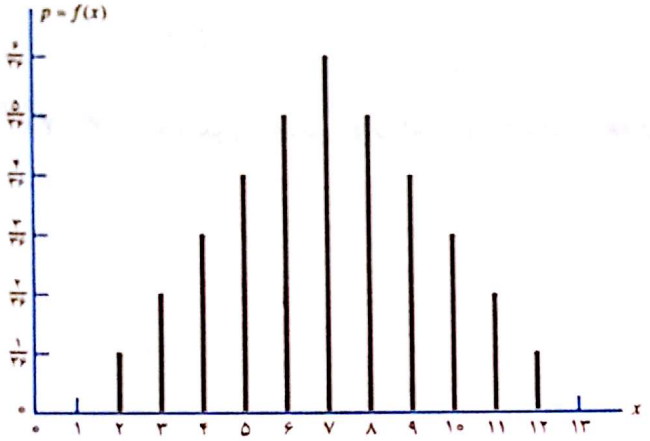
۱,۶	۱,۵	۱,۴	۱,۳	۱,۲	۱,۱
۲,۶	۲,۵	۲,۴	۲,۳	۲,۲	۲,۱
۳,۶	۳,۵	۳,۴	۳,۳	۳,۲	۳,۱
۴,۶	۴,۵	۴,۴	۴,۳	۴,۲	۴,۱
۵,۶	۵,۵	۵,۴	۵,۳	۵,۲	۵,۱
۶,۶	۶,۵	۶,۴	۶,۳	۶,۲	۶,۱

Scanned by CamScanner

جدول ۲۰-۱
توزیع احتمال.

x	۲	۳	٤	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f(x)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{٤}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{٤}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

شکل ۲۰-۲
فرکانس یا فراوانی توزیع.



جدول ۲۰-۲
توزیع احتمال تجمعی.

x	۲	۳	٤	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f(x)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۱۰}{۳۶}$	$\frac{۱۵}{۳۶}$	$\frac{۲۱}{۳۶}$	$\frac{۲۶}{۳۶}$	$\frac{۳۰}{۳۶}$	$\frac{۳۳}{۳۶}$	$\frac{۳۵}{۳۶}$	$\frac{۳۶}{۳۶}$

داده‌های جدول ۲۰-۱ به صورت ترسیمی در شکل ۲۰-۲ نمایش داده شده‌اند. در اینجا، روشن است که احتمال، تابعی از x است. تابع احتمال $p = f(x)$ را معمولاً تابع فرکانس (یا تابع فراوانی) یا برخی اوقات تابع چگالی احتمال* (PDF) می‌نامند. احتمال اینکه x کوچکتر یا مساوی یک مقدار معین x_i باشد را می‌توان از تابع احتمال، با جمع کردن احتمال تمامی xها تا مقدار x_i (که خود x_i را نیز شامل می‌شود) بدست آورد. اگر این کار را با جدول ۲۰-۱ انجام دهیم، و x_i را برابر ۲، سپس ۳، و ... و ۱۲ قرار دهیم، جدول ۲۰-۲ که **توزیع احتمال تجمعی*** نامیده می‌شود را بدست می‌آوریم. تابع $F(x)$ در جدول ۲۰-۲ را **تابع چگالی تجمعی*** (CDF) از متغیر x گویند. تابع $F(x)$ را برحسب $f(x)$ می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

* *probability density function*

* *cumulative probability distribution*

* *cumulative density function*

$$F(x_i) = \sum_{x_j \le x_i} f(x_j) \qquad (۱-۲۰)$$

توزیع تجمعی را می‌توان به صورت ترسیمی نیز نمایش داد (شکل ۲۰-۳).

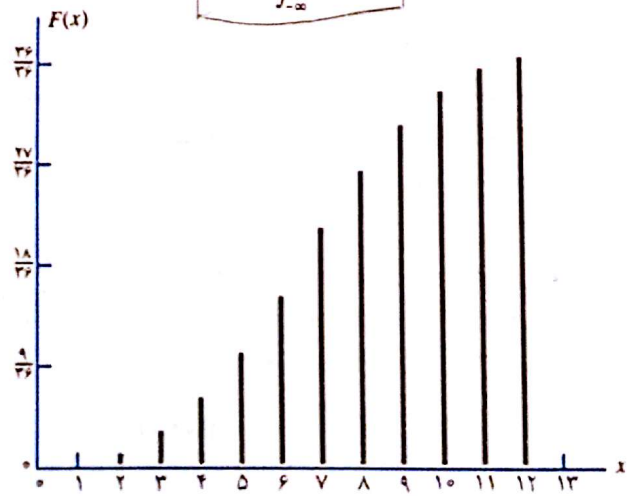
متغیر x در این مثال را **متغیر تصادفی گسسته*** می‌گویند، چرا که x تنها دارای مقادیر گسسته است. **متغیر تصادفی پیوسته**** متغیری است که در یک بازه مشخص می‌تواند هر مقداری به خود بگیرد. برای یک تابع چگالی احتمال پیوسته $F(x)$، احتمال مشاهده یک پیشامد مساوی یا کوچکتر از x از رابطه زیر بدست می‌آید:

* *discrete random variable*

** *continuous random variable*

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx} \qquad (۲-۲۰)$$

شکل ۲۰-۳
فرکانس یا فراوانی توزیع.



Scanned by CamScanner

که $f(x)$ احتمال بر واحد x است. هنگامی که $x \to \infty$، آنگاه

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1} \qquad (۳-۲۰)$$

مشتق‌گیری از معادله (۲۰-۲) چنین می‌دهد:

$$\boxed{\frac{dF(x)}{dx} = f(x)} \qquad (۴-۲۰)$$

۲۰-۲ میانگین حسابی، واریانس و انحراف معیار

برای مطالعه تغییرات در خواص و مشخصات اجزاء مکانیکی، عموماً با تعداد محدودی از اجزاء سروکار خواهیم داشت. تعداد کل اجزاء که جمعیت* نامیده می‌شود در برخی موارد می‌تواند بسیار زیاد باشد. در چنین مواردی، اندازه‌گیری مشخصه‌های هر یک از اعضاء این جمعیت عملاً غیرممکن است، چرا که گذشته از صرف زمان و هزینه بسیار زیاد، برخی از آزمایشها از نوع آزمایشهای مُخرّب* هستند و عملاً نمی‌توان تمامی محصولات را برای یافتن ویژگیهای آنها از بین برد. از این رو، گروه کوچکی از این جمعیت که نمونه* نامیده می‌شود را برای تعیین مشخصات قطعه مورد نظر انتخاب می‌کنیم.

میانگین حسابی یک نمونه که میانگین نمونه* نامیده می‌شود شامل N جزء است و با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i} \qquad (۵-۲۰)$$

μ_x

علاوه بر میانگین حسابی، خوب است معیار دیگری داشته باشیم که اطلاعاتی پیرامون نحوه پراکندگی و یا توزیع متغیرها نیز بدست دهد. برای هر متغیر تصادفی x، انحراف پیشامد شماره i از مقدار میانگین برابر $x_i - \bar{x}$ است. اما از آنجا که مجموع انحرافهایی که به این صورت تعریف می‌شوند همواره برابر صفر خواهد بود، آنها را به توان ۲ می‌رسانیم و واریانس نمونه* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{s_x^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_N-\bar{x})^2}{N-1} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (۶-۲۰)$$

$\hat{\sigma}^2$

انحراف معیار نمونه* به صورت ریشه دوم واریانس نمونه تعریف می‌شود:

$$\boxed{s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}} \qquad (۷-۲۰)$$

σ

معادله (۲۰-۷) برای برنامه‌ریزی در ماشین حساب چندان مناسب نیست. برای این منظور، از شکل دیگر انحراف معیار که در زیر آمده است استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 \Big/ N}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}}} \qquad (۸-۲۰)$$

توجه داشته باشید که برخی از مراجع، واریانس و انحراف معیار را با استفاده از N به جای $N-1$ در مخرج کسر تعریف می‌کنند. برای مقادیر بزرگ N، تفاوت بسیار ناچیز است، اما برای مقادیر کوچک، به تجربه ثابت شده است که مقدار $N-1$ در مخرج، نتایج بهتری برای ارزیابی واریانس جمعیتی که نمونه‌ها از آن انتخاب شده‌اند بدست می‌دهد.

معادلات (۲۰-۵) تا (۲۰-۸) به طور ویژه برای نمونه‌های یک جمعیت بکار می‌روند. چنانچه بخواهیم تمامی جمعیت را مورد بررسی قرار دهیم، معادلات مشابهی بکار می‌رود، با این تفاوت که $\bar{x}$ و s_x به ترتیب با نمادهای μ_x و $\hat{\sigma}_x$ جایگزین می‌شوند. علامت «^» (که به آن «کلاه»* می‌گویند) را برای جلوگیری از اشتباه با نماد تنش عمودی بکار می‌بریم. برای واریانس و انحراف معیار جمعیت، به جای $N-1$ در مخرج بایستی N را بکار برد.

برخی اوقات درباره انحراف معیار استحکام یک قطعه صحبت می‌کنیم و بایستی مراقب باشید که نمادها را اشتباه نگیرید. توجه داشته باشید که از حرف بزرگ S برای استحکام و از حرف کوچک s برای انحراف معیار استفاده می‌کنیم.

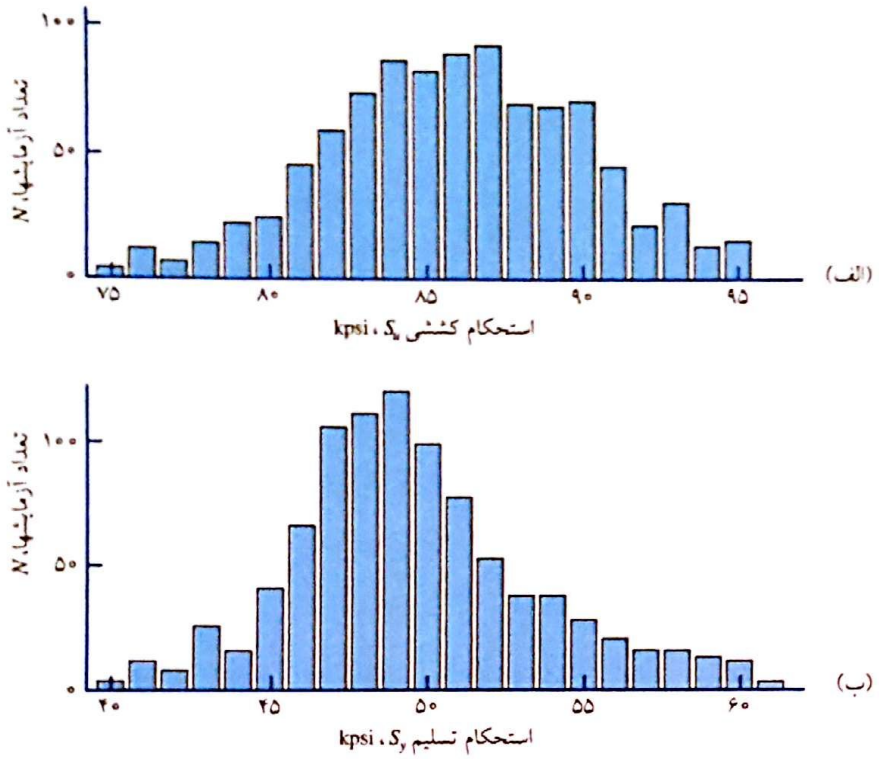
شکل ۲۰-۴ نمودار ستونی فرکانسی گسسته* نامیده می‌شود که نشان دهنده تعداد پیشامدها یا فراوانی رده‌ها** f_i در یک محدوده مشخص است. اگر داده‌ها به این صورت گروه‌بندی شوند، آنگاه میانگین و انحراف معیار از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i} \qquad (۹-۲۰)$$

* population
* destructive testing
* sample
* sample mean
* sample variance
* sample standard deviation
* hat
* discrete frequency histogram
** class frequency

* توجه شود (۲۰-۱۰) نتایج گسسته را در صفحه بعد

Scanned by CamScanner



شکل ۲۰ - ۴

توزیع خواص کششی فولاد نورد گرم شده UNS G ۱۰۳۵۰. این آزمایش‌ها با استفاده از میله‌هایی به قطر از ۱ تا ۹ in صورت گرفته است. (الف) توزیع استحکام کششی ۹۳۰ نمونه: $\bar{S}_u = ۸۶٫۰$ kpsi، $s_{S_u} = ٤٫٩٤$ kpsi. (ب) توزیع استحکام تسلیم از ۸۹۹ نمونه: $\bar{S}_y = ٤٩٫٥$ kpsi، $s_{S_y} = ٥٫٣٦$ kpsi. مرجع: *Metals Handbook*, vol. 1, 8th. ed. American Society for Metals, Metals Park, Ohio, 1961, p. 64) www.asminternational.org.

و

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2 \Big/ N}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}} \qquad (۱۰-۲۰)$$

در اینجا، x_i، f_i و k به ترتیب میانه رده، فرکانس پیشامدها در محدوده رده، و تعداد کل رده‌ها هستند. همچنین، تابع چگالی تجمعی که احتمال یک پیشامد در رده شماره x_i یا کوچکتر از آن را بدست می‌دهد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F_i = \frac{f_i w_i}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} f_i w_i \qquad (۱۱-۲۰)$$

که w_i بیانگر پهنای رده در x_i است. برای شکل ۲۰-۴ الف، $k = 21$ و پهنای رده در $w = 1$ kpsi ثابت است.

نمادگذاری

در دروس استاتیک و دینامیک دیدید که کمیّتهای برداری مانند نیرو، سرعت یا جابجایی که توسط دو یا سه کمیت دیگر نظیر راستا و اندازه آنها مشخص می‌شوند را با حروف سیاه (برای مثال، **F**، **V** و **x**) نمایش می‌دهیم. در این کتاب، ما نیز از همین قرارداد نمادگذاری برای نشان دادن متغیرهای تصادفی استفاده می‌کنیم، چرا که کمیتهای تصادفی نیز توسط میانگین و انحراف معیار آنها مشخص می‌شوند.

در کتابهای آمار، اصطلاحاتی مانند «متغیرهای بختی» و «واریته»* نیز به معنی متغیرهای تصادفی بکار می‌روند. یک کمیّت قطعی*، کمیتی است که دارای یک مقدار مشخص است. میانگین یک جمعیت، یک کمیت قطعی است، و انحراف معیار آن نیز چنین است. یک متغیر تصادفی را می‌توان توسط مقدار میانگین و انحراف معیار، یا با مقدار میانگین و ضریب تغییرات* که به صورت زیر تعریف می‌شود بیان کرد:

$$\boxed{C_x = \frac{s_x}{\bar{x}}} \qquad (۱۲-۲۰)$$

بنابراین، متغیر تصادفی **x** برای نمونهٔ یک جمعیت را می‌توان به یکی از دو شکل زیر بیان کرد:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\bar{x}, s_x) = \bar{x}\,\mathbf{X}(1, C_x) \qquad (۱۳-۲۰)$$

که **X** نشانگر تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی است. توجه کنید که کمیّتهای قطعی $\bar{x}$، s_x و C_x همگی با حروف معمولی نوشته می‌شوند.

* stochastic variable and varia

* deterministic quanti

* coefficient of variati

Scanned by CamScanner

مثال ۲۰-۱ پنج تُن میلگرد با قطر in ۲ از فولاد نورد گرم شده ۱۰۳۰ وارد انبار شده است. ۹ عدد نمونه استاندارد آزمایش کشش به طور تصادفی از محلهای مختلف این میلگردها انتخاب می‌کنیم. در گزارش آزمایش، استحکام کششی نهایی برحسب kpsi بیان شده است. مقادیر بدست آمده به ترتیب صعودی در جدول ۲۰-۳ نمایش داده شده‌اند. با این فرض که این نمونه‌های آزمایشی، بهترین برآورد از جمعیت اصلی* باشند، میانگین $\bar{x}$، انحراف معیار s_x، و ضریب تغییرات C_x را برای این جمعیت نمونه پیدا کنید.

*parent population

جدول ۲۰-۳ داده‌های بدست آمده از آزمایش استاندارد کشش بر روی ۹ نمونه انتخابی از یک محموله میلگرد فولادی نورد گرم شده ۱۰۳۰.

S_{ut}, kpsi x^2	x
۳۹۴۳,۸۴	۶۲,۸
٤١٤٧,٣٦	۶٤,٤
٤٣٢٩,۶٤	۶۵,۸
٤٣٩٥,۶٩	۶۶,۳
٤۶٣٧,۶١	۶۸,١
٤٧٧٤,٨١	۶٩,١
٤٨٧٢,٠٤	۶٩,٨
۵١١٢,٢۵	٧١,۵
۵٤٧۶,٠٠	٧٤,٠
$\sum$ ٤١۶٨٩,٢٤	۶١١,٨

حل از معادلات (۲۰-۵) و (۲۰-۸)،

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

و

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2/N}{N-1}}$$

بهتر است پیش از ارزیابی $\bar{x}$ و s_x، مقادیر $\sum x$ و $\sum x^2$ را محاسبه کنیم. این محاسبات در جدول ۲۰-۳ آمده است.

جواب

$$\bar{x} = \frac{1}{9}(۶١١,٨) = ۶٧,٩٨ \text{ kpsi}$$

جواب

$$s_x = \sqrt{\frac{٤١۶٨٩,٢٤ - ۶١١,٨^2/٩}{٩-١}} = ٣,۵٢٣ \text{ kpsi}$$

از معادله (۲۰-۱۲) داریم:

جواب

$$C_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{٣,۵٢٣}{۶٧,٩٨} = ٠,٠۵٢١$$

این سه شاخص، برآوردهایی از پارامترهای آماری جمعیت اصلی هستند. توجه داشته باشید که این نتایج مستقل از توزیع داده‌ها می‌باشند.

مثال ۲۰-۲ داده‌های مثال ۲۰-۱ به صورت یک نمودار ستونی از دو ستون نخست جدول ۲۰-۴ در اختیار طراح قرار گرفته است. با استفاده از این شکل داده‌ها، میانگین $\bar{x}$، انحراف معیار s_x، و ضریب تغییرات C_x را پیدا کنید.

جدول ۲۰-۴ داده‌های گروه‌بندی شده استحکام کششی نهایی ۹ نمونه انتخابی از یک محموله میلگرد فولادی نورد گرم شده ۱۰۳۰.

نقطه میانی رده x, kpsi	فراوانی رده f	گسترش fx	fx^2
۶٣,۵	٢	١٢٧	٨,٠٠۶٤,۵٠
۶۶,۵	٢	١٣٣	٨,٨٤٤,۵٠
۶٩,۵	٣	٢٠٨,۵	١٤,٤٨٠,٧۵
٧٢,۵	٢	١٤۵	١٠,۵١٣,۵٠
	٩	۶١٣,۵	$\sum$ ٤١,٩١٢,٢۵

Scanned by CamScanner

داده‌های ستون اول و دوم در جدول ۲۰-۴، یعنی x و f، برای محاسبه عبارتهای $\Sigma f_i x_i$ و $\Sigma f_i x_i^2$ بکار رفته‌اند.

حل از معادله (۲۰-۹)،

جواب
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{9} f_i x_i = \frac{1}{9}(۶۱۳٫۵) = ۶۸٫۱۷ \text{ kpsi}$$

از معادله (۲۰-۱۰)،

جواب
$$s_x = \sqrt{\frac{۴۱۹۱۲٫۲۵ - ۶۱۳٫۵^2/۹}{۹-۱}} = ۳٫۳۹۱ \text{ kpsi}$$

از معادله (۲۰-۱۲)،

جواب
$$C_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{۳٫۳۹۱}{۶۸٫۱۷} = ۰٫۰۴۹۷$$

به تغییرات کوچک $\bar{x}$، s_x، و C_x در اثر تغییرات اندک در عبارتهای جمع توجه کنید.

شاخص‌های آماری بدست آمده بیانگر استحکام کششی نهایی S_{ut} ماده‌ای هستند که ما قطعات را از آن می‌سازیم. چنین توصیفی به کمک فقط یک عدد ممکن نیست. در عمل، بعضی اوقات دو یا سه عدد علاوه بر عدد شناسایی، یا حداقل تقریب محکمی از توزیع داده‌ها لازم است. با توجه به داده‌های مثال ۲۰-۱ به پرسشهای زیر پاسخ دهید:

- آیا می‌توان استحکام کششی نهایی را به کمک مقدار میانگین آن $\bar{S}_{ut}$ توصیف کرد؟
- آیا می‌توان کمترین استحکام کششی نهایی، یعنی ۶۲٫۸ kpsi را مقدار حداقل دانست؟

خیر، زیرا با انتخاب تعداد بیشتری نمونه آزمایشی بدون شک می‌توان به استحکامهای کششی نهایی کمتری رسید.

- آیا می‌توان توزیع استحکام کششی نهایی برای محموله میلگرد فولادی ۱۰۳۰ در مثال ۲۰-۱ را پیدا کرد؟

بله، اما این کار نیازمند تعداد بیشتری نمونه آزمایشی و رسم نتایج حاصل بر روی مختصاتی است که رشته داده‌ها را مستقیم می‌کند.

۲۰-۳ توزیع‌های احتمال

تعدادی توزیع احتمال گسسته و پیوستهٔ استاندارد وجود دارد که معمولاً در مسائل مهندسی بکار می‌روند. در این بخش، چهار توزیع احتمال پیوستهٔ مهم از جمله، توزیع «گوس» یا توزیع طبیعی، توزیع لگاریتمی طبیعی، توزیع یکنواخت، و توزیع «وایبول» را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

توزیع «گوس» یا توزیع طبیعی

هنگامی که «گوس» از خود پرسید، «برازنده‌ترین توزیع برای یک مجموعه از داده‌ها چیست؟»، پاسخ آن توزیعی بود که بعدها نام خود او بر آن نهاده شد. توزیع «گوس» یا توزیع طبیعی، یکی از مهمترین توزیعهایی است که تابع چگالی احتمال آن برحسب مقدار میانگین μ_x و انحراف معیار آن $\hat{\sigma}_x$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\hat{\sigma}_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\hat{\sigma}_x}\right)^2\right]} \qquad (۲۰-۱۴)$$

با نمادهایی که در بخش ۲۰-۲ تعریف کردیم، متغیر تصادفی x که دارای توزیع طبیعی است می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$x = N(\mu_x, \hat{\sigma}_x) = \mu_x N(1, C_x) \qquad (۲۰-۱۵)$$

که N نشانگر تابع توزیع طبیعی در معادله (۲۰-۱۴) است.

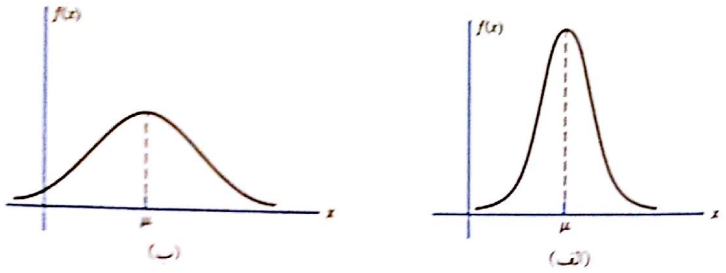
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

از آنجا که معادله (۲۰-۱۴) یک تابع چگالی احتمال است، سطح زیر نمودار آن لزوماً بایستی واحد باشد. نمودارهای معادله (۲۰-۱۴) در شکل ۲۰-۵ برای انحراف معیارهای کوچک و بزرگ نشان داده شده‌اند. این منحنی «زنگوله‌وار»* برای مقادیر کوچک $\hat{\sigma}$ بلندتر و باریکتر، و برای مقادیر بزرگتر $\hat{\sigma}$ کوتاهتر و پهن‌تر است. انتگرالگیری از معادله (۲۰-۱۴) به منظور یافتن تابع چگالی تجمعی $F(x)$ در شکل بسته امکان‌پذیر نیست، اما می‌توان به صورت عددی از آن انتگرال گرفت. برای جلوگیری از نیاز به تعداد زیادی جدول برای مقادیر μ و $\hat{\sigma}$، انحراف از مقدار میانگین را توسط تبدیل زیر برحسب واحدهای انحراف معیار بیان می‌کنیم:

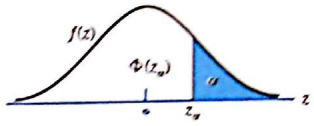
$$z = \frac{x-\mu_x}{\hat{\sigma}_x} \qquad (۲۰-۱۶)$$

* bell-shaped curve

Scanned by CamScanner



شکل ۲۰-۵
منحنی‌های توزیع طبیعی؛
(الف) مقادیر کوچک σ،
(ب) مقادیر بزرگ σ.



شکل ۲۰-۶
توزیع طبیعی استاندارد.

انتگرال این تبدیل که نمودار آن را در شکل ۲۰-۶ می‌بینید، در جدول پیوست (الف-۱۰) آمده است. مقدار تابع چگالی تجمعی طبیعی اغلب اوقات مورد استفاده قرار می‌گیرد، و در بسیاری معادلات نیز بکار می‌رود. از این رو، دارای نماد ویژه $\Phi(z)$ است. تبدیل متغیر تصادفی z دارای توزیع طبیعی با میانگین صفر، و انحراف معیار و واریانس واحد است، یعنی $z = N(0, 1)$. احتمال یک پیشامد کمتر از z برابر $\Phi(z)$ برای مقادیر منفی z، و $1 - \Phi(z)$ برای مقادیر مثبت z در جدول (الف-۱۰) است.

مثال ۲۰-۳ در آزمایش محموله‌ای شامل ۲۵۰ عدد شاتون*، میانگین استحکام کششی ۴۵ kpsi و انحراف معیار آن ۵ kpsi بدست آمد.

(الف) با فرض توزیع طبیعی، انتظار می‌رود که چه تعداد از شاتونها دارای استحکام کمتر از ۳۹/۵ kpsi باشند؟

(ب) انتظار می‌رود که چه تعداد از آنها دارای استحکام بین ۳۹/۵ و ۵۹/۵ kpsi باشند؟

* connecting rod

حل (الف) جایگذاری مقادیر در معادله (۲۰-۱۶) متغیر تصادفی استاندارد شده z را به صورت زیر بدست می‌دهد:

$$z_{۳۹/۵} = \frac{x - \mu_x}{\hat{\sigma}_x} = \frac{S - \bar{S}}{\hat{\sigma}_S} = \frac{۳۹/۵ - ۴۵}{۵} = -۱/۱۰$$

احتمال اینکه استحکام کمتر از ۳۹/۵ kpsi باشد را می‌توان با نماد $F(z) = \Phi(-۱/۱۰)$ نمایش داد. با استفاده از جدول الف-۱۰ و با مراجعه به شکل ۲۰-۷، مقدار $\Phi(z_{۳۹/۵}) = ۰/۱۳۵۷$ بدست می‌آید. بنابراین، تعداد شاتونهایی که دارای استحکام کمتر از ۳۹/۵ kpsi هستند برابر است با:

جواب
$$N\Phi(z_{۳۹/۵}) = ۲۵۰\,(۰/۱۳۵۷) = ۳۳/۹ \approx ۳۴$$

زیرا $\Phi(z_{۳۹/۵})$ نشانگر نسبتی از جمعیت N است که دارای استحکام کمتر از ۳۹/۵ kpsi هستند.

(ب) متناظر با استحکام $S = ۵۹/۵$ kpsi داریم:

$$z_{۵۹/۵} = \frac{۵۹/۵ - ۴۵}{۵} = ۲/۹۰$$

با مراجعهٔ دوباره به شکل ۲۰-۷ می‌بینیم که احتمال اینکه استحکام کمتر از ۵۹/۵ kpsi باشد برابر $F(z) = \Phi(z_{۵۹/۵})$ است. از آنجا که متغیر z مثبت است، نیاز به یافتن مقدار مکمل واحد داریم. بنابراین، از جدول الف-۱۰،

$$\Phi(۲/۹۰) = ۱ - \Phi(-۲/۹۰) = ۱ - ۰/۰۰۱۸۷ = ۰/۹۹۸۱۳$$

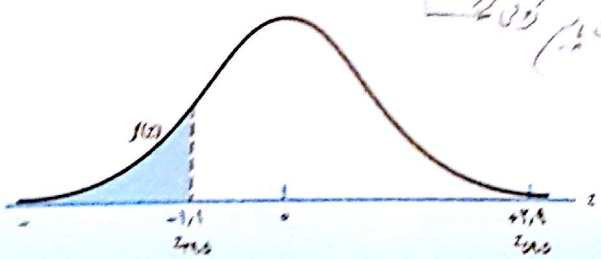
احتمال اینکه استحکام بین ۳۹/۵ و ۵۹/۵ kpsi باشد، سطح بین مختصات $z_{۳۹/۵}$ و $z_{۵۹/۵}$ در شکل ۲۰-۷ است. این احتمال برابر است با:

$$p = \Phi(z_{۵۹/۵}) - \Phi(z_{۳۹/۵}) = \Phi(۲/۹۰) - \Phi(-۱/۱۰) = ۰/۹۹۸۱۳ - ۰/۱۳۵۷ = ۰/۸۶۲۴۳$$

بنابراین، تعداد شاتونهایی که انتظار می‌رود دارای استحکامی بین ۳۹/۵ و ۵۹/۵ kpsi باشند برابر است با:

جواب
$$Np = ۲۵۰\,(۰/۸۶۲) = ۲۱۵/۵ \approx ۲۱۶$$

باید طبق روش محاسبات درست پایین کوچکی



شکل ۲۰-۷

Scanned by CamScanner

توزیع لگاریتمی طبیعی

برخی اوقات متغیرهای تصادفی دارای دو مشخصه زیر هستند:

- توزیع آنها نسبت به مقدار میانگین، نامتقارن است.
- متغیرها تنها دارای مقادیر مثبت هستند.

چنین مشخصه‌هایی استفاده از توزیع طبیعی را منتفی می‌کند. انواع دیگر توزیع وجود دارد که در چنین مواردی می‌توانند بالقوه مفید باشند، که یکی از آنها توزیع لگاریتمی طبیعی* است. به ویژه، هنگامی که با متغیر عمر سر و کار داریم (مانند عمر خستگی تحت تنشهای تکرارشونده یا عمر سایشی یاتاقانهای غلتشی) توزیع لگاریتمی طبیعی می‌تواند یکی از توزیعهای بسیار مناسب باشد.

توزیع لگاریتمی طبیعی یکی از توزیعهایی است که در آن، لگاریتمهای متغیر تصادفی دارای توزیع طبیعی است. بنابراین، خود متغیر تصادفی دارای توزیع لگاریتمی طبیعی است. اینک، این متغیر تصادفی را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\boxed{x = LN(\mu_x, \hat{\sigma}_x)} \qquad \text{(الف)}$$

معادله (الف) بیانگر این است که متغیر تصادفی x دارای توزیع لگاریتمی طبیعی است و مقدار میانگین آن μ_x و انحراف معیار آن $\hat{\sigma}_x$ می‌باشد.

اینک، تبدیل زیر را بکار می‌بریم:

$$y = \ln x \qquad \text{(ب)}$$

از آنجا که طبق تعریف، y دارای توزیع طبیعی است، می‌توان چنین نوشت:

$$y = N(\mu_y, \hat{\sigma}_y) \qquad \text{(ج)}$$

این معادله بیانگر این است که متغیر تصادفی y دارای توزیع طبیعی است و میانگین آن μ_y و انحراف معیار آن $\hat{\sigma}_y$ می‌باشد.

راحت‌تر است اینگونه فکر کنیم که معادله (الف) توزیع مادر یا توزیع اصلی* است، در حالی که معادله (ب) به مثابه توزیع همراه یا توزیع فرعی* است.

تابع چگالی احتمال (PDF) برای x را می‌توان از تابع چگالی احتمال y بدست آورد. به معادله (۲۰-۱۴) نگاه کنید و y را جایگزین x نمایید. به این ترتیب، تابع چگالی احتمال برای توزیع همراه به صورت زیر پیدا می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\hat{\sigma}_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x - \mu_y}{\hat{\sigma}_y}\right)^2\right] & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad (۲۰-۱۷)$$

میانگین همراه μ_y و انحراف معیار $\hat{\sigma}_y$ در معادله (۲۰-۱۷) از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\mu_y = \ln\mu_x - \ln\sqrt{1 + C_x^2} \approx \ln\mu_x - \tfrac{1}{2}C_x^2 \qquad (۲۰-۱۸)$$

$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\ln(1 + C_x^2)} \approx C_x \qquad (۲۰-۱۹)$$

این معادلات امکان استفاده از جدول الف-۱۰ برای انجام محاسبات آماری را فراهم می‌کنند و نیاز به یک جدول ویژه برای توزیع لگاریتمی طبیعی را برطرف می‌کنند.

* lognormal distribution

* parent or principal distribution

* companion or subsidiary distribution

مثال ۲۰-۴ پس از آزمایش کشش هزار نمونه از فولاد ۱۰۲۰، استحکام کششی نهایی آنها به صورت داده‌های گروه‌بندی شده در جدول ۲۰-۵ گرد آمده است. از معادله (۲۰-۹) داریم:

$$\bar{x} = \frac{۶۳۶۲۵}{۱۰۰۰} = ۶۳٫۶۲۵ \text{ kpsi}$$

از معادله (۲۰-۱۰)،

$$s_x = \sqrt{\frac{۴۰۵۴۸۶۴ - ۶۳۶۲۵^2/۱۰۰۰}{۱۰۰۰ - ۱}} = ۲٫۵۹۴۲۴۵ = ۲٫۵۹۴ \text{ kpsi}$$

$$C_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{۲٫۵۹۴۲۴۵}{۶۳٫۶۲۵} = ۰٫۰۴۰۷۷۳ = ۰٫۰۴۰۸$$

Scanned by CamScanner

از معادله (۲۰-۱۲) تابع چگالی احتمال (PDF) برای یک توزیع طبیعی با میانگین ۶۳٫۶۲۵ و انحراف معیار ۲٫۵۹۲۲۲۵ برابر است با:

$$f(x) = \frac{1}{2.5922225\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-63.625}{2.5922225}\right)^2\right]$$

برای مثال، $f(63.625) = 0.1538$ است. برای ایجاد داده‌های مربوط به ستون «چگالی طبیعی» در جدول ۲۰-۵، تابع چگالی احتمال $f(x)$ برای نقاط میانی هر رده* محاسبه می‌شود.

*رده

جدول ۲۰-۵
کاربرگ مثال ۲۰-۴.

نقطه میانی رده kpsi	فراوانی f_i	گسترش $x_i f_i$	گسترش $x_i^2 f_i$	تابع چگالی احتمال $f_i/(Nw)$*	چگالی طبیعی $f(x)$	چگالی لگاریتمی طبیعی $g(x)$
۵۶٫۵	۲	۱۱۳٫۰	۶,۳۸۴٫۵	۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۳۵	۰٫۰۰۲۶
۵۷٫۵	۱۸	۱,۰۳۵٫۰	۵۹,۵۱۲٫۵	۰٫۰۱۸	۰٫۰۰۹۵	۰٫۰۰۸۲
۵۸٫۵	۲۳	۱,۳۴۵٫۵	۷۸,۷۱۱٫۷۵	۰٫۰۲۳	۰٫۰۲۱۸	۰٫۰۲۰۹
۵۹٫۵	۳۱	۱,۸۴۴٫۵	۱۰۹,۷۴۷٫۷۵	۰٫۰۳۱	۰٫۰۴۳۴	۰٫۰۴۴۰
۶۰٫۵	۸۳	۵,۰۲۱٫۵	۳۰۳,۸۰۰٫۷۵	۰٫۰۸۳	۰٫۰۷۴۴	۰٫۰۷۲۳
۶۱٫۵	۱۰۹	۶,۷۰۳٫۵	۴۱۲,۳۶۵٫۲۵	۰٫۱۰۹	۰٫۱۱۰	۰٫۱۱۴۳
۶۲٫۵	۱۳۸	۸,۶۲۵٫۰	۵۳۹,۰۶۲٫۵	۰٫۱۳۸	۰٫۱۴۰	۰٫۱۴۳۴
۶۳٫۵	۱۵۱	۹,۵۸۸٫۵	۶۰۸,۸۶۹٫۷۵	۰٫۱۵۱	۰٫۱۵۳۶	۰٫۱۵۳۹
۶۴٫۵	۱۳۹	۸,۹۶۵٫۵	۵۷۸,۲۷۴٫۷۵	۰٫۱۳۹	۰٫۱۴۵۳	۰٫۱۴۲۴
۶۵٫۵	۱۳۰	۸,۵۱۵٫۰	۵۷۷,۷۳۲٫۵	۰٫۱۳۰	۰٫۱۱۸۴	۰٫۱۱۴۲
۶۶٫۵	۸۲	۵,۴۵۳٫۰	۳۶۲,۶۲۴٫۵	۰٫۰۸۲	۰٫۰۸۳۲	۰٫۰۸۰۰
۶۷٫۵	۴۹	۳,۳۰۷٫۵	۲۲۳,۲۵۶٫۲۵	۰٫۰۴۹	۰٫۰۵۰۴	۰٫۰۴۹۳
۶۸٫۵	۲۸	۱,۹۱۸٫۰	۱۳۱,۳۸۲٫۰	۰٫۰۲۸	۰٫۰۲۶۳	۰٫۰۲۶۸
۶۹٫۵	۱۱	۷۶۴٫۵	۵۳,۱۳۲٫۷۵	۰٫۰۱۱	۰٫۰۱۱۸	۰٫۰۱۲۹
۷۰٫۵	۴	۲۸۲٫۰	۱۹,۸۸۱٫۰	۰٫۰۰۴	۰٫۰۰۴۶	۰٫۰۰۵۶
۷۱٫۵	۲	۱۴۳٫۰	۱۰,۲۲۴٫۵	۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۱۵	۰٫۰۰۲۲
	۱,۰۰۰	۶۳,۶۲۵	۴,۰۵۴,۸۶۴	Σ۱٫۰۰۰		

*برای مقایسه داده‌های فراوانی گسسته با توابع چگالی احتمال پیوسته، f_i را بایستی بر Nw تقسیم کرد که N = تعداد نمونه‌ها = ۱۰۰۰، w = پهنای رده = ۱ kpsi است.

مثال ۲۰-۵ مثال ۲۰-۴ را برای تابع چگالی لگاریتمی طبیعی* ادامه می‌دهیم.

حل از معادلات (۲۰-۱۸) و (۲۰-۱۹) داریم:

*lognormal density function

$$\mu_y = \ln\mu_x - \ln\sqrt{1+C_x^2} = \ln 63.625 - \tfrac{1}{2}\ln(1+0.020773^2) = 2.1522$$

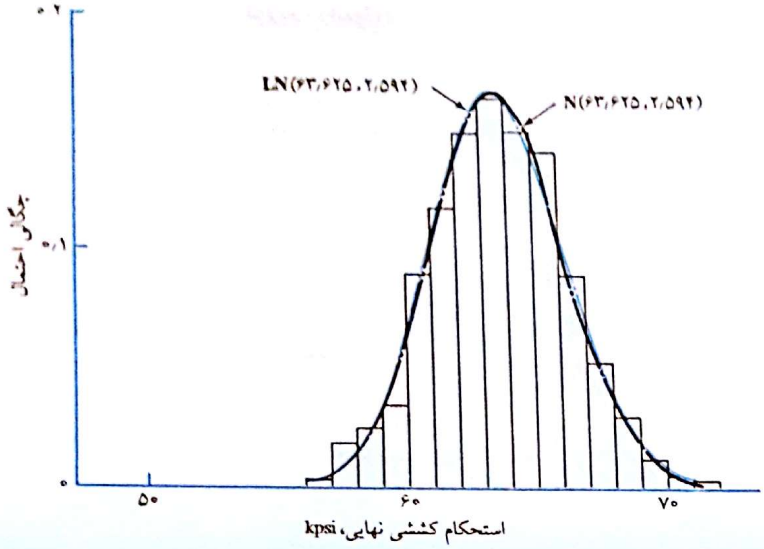
$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\ln(1+C_x^2)} = \sqrt{\ln(1+0.020773^2)} = 0.0208$$

در معادله (۲۰-۱۷) چگالی احتمال برای یک توزیع لگاریتمی طبیعی به صورت زیر است:

$$g(x) = \frac{1}{x(0.0208)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - 2.1522}{0.0208}\right)^2\right] \qquad x > 0$$

برای مثال، $g(63.625) = 0.1537$ است. چگالی لگاریتمی طبیعی در آخرین ستون جدول ۲۰-۵ آمده است. تابع چگالی احتمال برای توزیع لگاریتمی طبیعی را بر روی نمودار ستونی مثال ۲۰-۴ در امتداد چگالی طبیعی ترسیم کنید. همانگونه که در شکل ۲۰-۸ می‌بینید، هر دو چگالی طبیعی و چگالی لگاریتمی طبیعی دارای انطباق خوبی هستند.

Scanned by CamScanner



شکل ۲۰ - ۱۱
نمودار ستونی مثالهای ۲۰-۴ و ۲۰-۵، برهم‌نهی توابع چگالی احتمال با توزیع‌های طبیعی و لگاریتمی طبیعی.

توزیع یکنواخت

توزیع یکنواخت*، یک توزیع با محدودهٔ بسته است و هنگامی رخ می‌دهد که احتمال یک مشاهده دقیقاً مشابه احتمال هر پیشامد دیگر باشد. اگر a حد پایین و b حد بالا باشد، تابع چگالی احتمال (PDF) برای یک توزیع یکنواخت به صورت زیر خواهد بود:

* uniform distribution

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \le x \le b \\ 0 & a > x > b \end{cases} \qquad (۲۰-۲۰)$$

بنابراین، تابع چگالی تجمعی (CDF) که انتگرال تابع $f(x)$ است، یک تابع خطی در محدوده $a \le x \le b$ خواهد بود:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x-a)/(b-a) & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases} \qquad (۲۰-۲۱)$$

که میانگین و انحراف معیار آن از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\mu_x = \frac{a+b}{2} \qquad (۲۰-۲۲)$$

$$\hat{\sigma}_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \qquad (۲۰-۲۳)$$

از جمله مواردی که توزیع یک جمعیت از نوع یکنواخت می‌شود، در فرآیندهای ساخت است، یعنی هنگامی که تولید انبوه یک قطعه در فرایندهای اتوماتیک در اثر تغییرات تدریجی ابزارهای برش ناشی از سایش آنها و افزایش نیروهای وارد از طرف ابزارها بین مراحل پیش تنظیم آنها منجر به تغییرات تدریجی ابعاد قطعات تولید شده می‌گردد. اگر n شماره توالی یا شماره پردازش قطعه، و n_f شماره آخرین قطعه پیش از تنظیم مجدد دستگاه باشد، در این صورت، اندازه x یک رابطه خطی با شماره توالی قطعه n خواهد داشت. اگر آخرین قطعهٔ شاهد* که در هنگام تنظیمات ساخته می‌شود دارای اندازه x_i، و آخرین قطعه تولیدی دارای اندازه x_f باشد، اندازه قطعه‌ای با شماره توالی n از رابطه زیر بدست می‌آید:

* proof part

$$x = x_i + (x_f - x_i)\frac{n}{n_f} = x_i + (x_f - x_i)\,F(x) \qquad (\text{الف})$$

چرا که n/n_f یک تقریب خوب از تابع چگالی تجمعی (CDF) است. با حل رابطه (الف) برای $F(x)$ چنین خواهیم داشت:

$$F(x) = \frac{x - x_i}{x_f - x_i} \qquad (\text{ب})$$

این معادله را با معادله دوم (۲۰-۲۱) مقایسه کنید.

Scanned by CamScanner

توزیع «وایبول»

توزیع «وایبول» برگرفته از آمار کلاسیک نیست. از این رو، معمولاً در متون درسی آمار مقدماتی نیز آورده نمی‌شود. این توزیع، یک توزیع غیرمتقارن با مقادیر مختلف برای میانگین و میانه است. این نوع توزیع ضمن اینکه انطباق خوبی با داده‌های توزیع طبیعی دارد، داده‌های با توزیع نمایی را نیز با دقت بسیار بالایی پوشش می‌دهد. به علت انعطاف‌پذیری، و شواهد مثبتی که از نتایج ازمایشگاهی و تجربیات میدانی در تأیید توزیع «وایبول» وجود دارد، این نوع توزیع کاربرد گسترده‌ای در علوم مهندسی پیدا کرده است. توزیع «وایبول» معمولاً در مواردی بکار می‌رود که با نتایج تجربی سروکار داریم؛ برای مثال، در تعیین «قابلیت اعتماد».

کاربرد گسترده در مهندسی دارد.

عبارت مربوط به قابلیت اعتماد، مقدار متمم تابع چگالی تجمعی است. قابلیت اعتماد که برحسب توزیع سه پارامتری «وایبول» بیان می‌شود به صورت زیر است:

$$R(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{\theta-x_0}\right)^b\right] \qquad x \ge x_0 \ge 0 \tag{۲۰-۲۴}$$

که این سه پارامتر عبارتند از:

x_0 = کمترین مقدار تضمین شده x،
θ = یک مقدار مشخصه، $(\theta \ge x_0)$
b = پارامتر شکل، $(b > 0)$

$3.3 < b < 3.5$ * تقریباً متقارن ⇐ توزیع طبیعی

$b=1$ * ⇐ توزیع نمایی

برای حالت خاصی که $x_0 = 0$ است، معادله (۲۰-۲۴) به صورت توزیع دو پارامتری «وایبول» درمی‌آید:

$$R(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^b\right] \qquad x \ge 0 \tag{۲۰-۲۵}$$

مشخصه متغیر تصادفی θ نقشی مشابه مقدار میانگین ایفاء می‌کند و بیانگر مقداری از x است که ۶۳٫۲ درصد از پیشامدها در زیر آن قرار گرفته‌اند.

پارامتر شکل b نقش کنترل کننده کجی منحنی توزیع را به عهده دارد. شکل ۲۰-۹ نشان می‌دهد که مقادیر بزرگ b توزیع را به سمت راست، و مقادیر کوچک b آن را به سمت چپ منحرف می‌کند. در محدودهٔ $۳٫۳ < b < ۳٫۵$، یک تقارن تقریبی بدست می‌آید که انطباق خوبی با داده‌های توزیع طبیعی پیدا می‌کند. هنگامی $b = ۱$ است، منحنی توزیع دارای شکل نمایی خواهد بود.

تقریباً متقارن

b بزرگ ⇐ انحراف به راست

b کوچک ⇐ انحراف به چپ

با داشتن یک قابلیت اعتماد مورد نیاز، حل معادله (۲۰-۲۴) برای x چنین می‌دهد:

$$x = x_0 + (\theta - x_0)\left(\ln\frac{1}{R}\right)^{1/b} \tag{۲۰-۲۶}$$

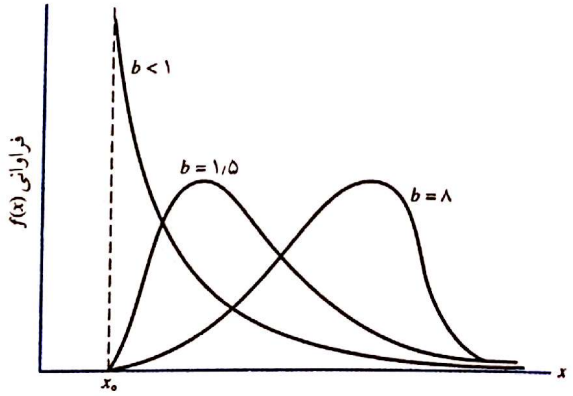
برای یافتن تابع احتمال،

(الف) $$F(x) = 1 - R(x)$$

(ب) $$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{dR(x)}{dx}$$

بنابراین، برای توزیع «وایبول»،

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{\theta - x_0}\left(\dfrac{x-x_0}{\theta-x_0}\right)^{b-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x-x_0}{\theta-x_0}\right)^b\right] & x \ge x_0 \ge 0 \\ 0 & x \le x_0 \end{cases} \tag{۲۰-۲۷}$$



شکل ۲۰-۹
تابع چگالی توزیع «وایبول» که اثر پارامتر b بر شکل منحنی توزیع را نشان می‌دهد.

Scanned by CamScanner

میانگین و انحراف معیار از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\mu_x = x_0 + (\theta - x_0)\,\Gamma(1 + 1/b) \qquad (۲۸-۲۰)$$

$$\hat{\sigma}_x = (\theta - x_0)\sqrt{\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)} \qquad (۲۹-۲۰)$$

Γ تابع گاما است که از جدول الف ـ ۳۲ بدست می‌آید. نمادی که برای توزیع «وایبول» بکار می‌رود چنین است[1]:

$$\boxed{x = W(x_0, \theta, b)} \qquad (۳۰-۲۰)$$

مثال ۲۰-۶ توزیع «وایبول» به طور گسترده برای بیان قابلیت اعتماد یاتاقانهای غلتشی بکار می‌رود (به بخش ۱۱-۲ نگاه کنید). در اینجا، متغیر تصادفی x به صورت متغیر بدون‌بُعد $x = L/L_{10}$ تعریف می‌شود که L عمر یاتاقان (برحسب تعداد دور)، و L_{10} عمر اسمی تعیین شده توسط شرکت سازنده است که به معنی عمری است که ۱۰ درصد از یاتاقانها تا قبل از رسیدن به این عمر دچار شکست می‌شوند (که به معنی احتمال شکست ۱۰ درصد و قابلیت اعتماد ۹۰ درصد است).

چنانچه پارامترهای «وایبول»، $x_0 = ۰٫۰۲۰۰$، $\theta = ۴٫۴۵۹$ و $b = ۱٫۴۸۳$ باشد، مشخصه‌های توزیعی یک یاتاقان شیار عمیق سری ۳۰-۰۲ را تعیین کنید. مقدار میانگین، میانه، L_{90}، و انحراف معیار را نیز بدست آورید.

حل از معادله (۲۰-۲۸) میانگین عمر بدون‌بُعد برابر است با:

جواب
$$\mu_x = x_0 + (\theta - x_0)\,\Gamma(1 + 1/b) = ۰٫۰۲۰۰ + (۴٫۴۵۹ - ۰٫۰۲۰۰)\,\Gamma(1 + 1/1٫۴۸۳) = ۴٫۰۳۳$$

پاسخ بالا بدین معنی است که میانگین عمر این یاتاقان $۴٫۰۳۳L_{10}$ است. میانه عمر این یاتاقان متناظر با قابلیت اعتماد ۵۰ درصد ($R = ۰٫۵$) یا L_{50} است که از معادله (۲۰-۲۶) چنین بدست می‌آید:

جواب
$$x_{0.5} = x_0 + (\theta - x_0)\left(\ln\frac{1}{0.5}\right)^{1/b} = ۰٫۰۲۰۰ + (۴٫۴۵۹ - ۰٫۰۲۰۰)\left(\ln\frac{1}{0.5}\right)^{1/1.483} = ۳٫۴۸۷$$

برای L_{90} یعنی قابلیت اعتماد $R = ۰٫۱$، عمر بدون‌بُعد x برابر است با:

جواب
$$x_{0.90} = ۰٫۰۲۰۰ + (۴٫۴۵۹ - ۰٫۰۲۰۰)\left(\ln\frac{1}{0.1}\right)^{1/1.483} = ۷٫۸۱۰$$

انحراف معیار عمر بدون‌بُعد از معادله (۲۰-۲۹) بدست می‌آید:

جواب
$$\hat{\sigma}_x = (\theta - x_0)\sqrt{\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)}$$
$$= (۴٫۴۵۹ - ۰٫۰۲۰۰)\sqrt{\Gamma(1 + 2/1٫۴۸۳) - \Gamma^2(1 + 1/1٫۴۸۳)} = ۲٫۷۵۳$$

۲۰-٤ انتشار خطا

در معادله زیر که برای محاسبه تنش محوری بکار می‌رود فرض کنید که نیروی F و سطح مقطع A متغیرهای تصادفی هستند.

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \text{(الف)}$$

در این صورت، معادله (الف) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{A}} \qquad \text{(ب)}$$

می‌بینید که تنش σ نیز یک متغیر تصادفی است. هنگامی که معادله (ب) را حل می‌کنیم، خطاهای ذاتی در $\mathbf{F}$ و $\mathbf{A}$ به متغیر تصادفی تنش σ نیز انتشار پیدا می‌کنند. روابط فراوانی وجود دارد که این اتفاق در آنها نیز رخ خواهد داد.

---

۱ - برای یافتن پارامترهای «وایبول» از داده‌های آماری به مثال ۲-۴ در ویراست پنجم این کتاب نگاه کنید:
J. E. Shigley and C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 5th ed., 1989, McGraw-Hill, New York, Sec. 4-12, Ex. 2-4.

Scanned by CamScanner

فرض کنید که می‌خواهیم دو متغیر تصادفی x و y را جمع کنیم و متغیر سوم z را ایجاد نماییم، یعنی:

$$z = x + y \qquad \text{(ج)}$$

میانگین را از رابطه زیر پیدا می‌کنیم:

$$\mu_z = \mu_x + \mu_y \qquad \text{(د)}$$

انحراف معیار متغیر z از جمع فیثاغورثی انحراف معیارهای x و y بدست می‌آید. بنابراین، انحراف معیار برای جمع یا تفریق متغیرهای مستقل به صورت زیر است:

$$\hat{\sigma}_z = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2} \qquad \text{(ه)}$$

روابط مشابهی برای طیف گسترده‌ای از توابع در جدول ۲۰-۶ آمده است. نتایج حاصل در این جدول را می‌توان برای یافتن توابع دیگر به راحتی با هم ترکیب کرد.

پرسشی که در اینجا مطرح می‌شود این است که توزیع حاصل از این عملیات مختلف چیست؟ برای پاسخ به این پرسش، آمارشناس‌ها از قضایای بستاری و قضیه حد مرکزی* استفاده می‌کنند[۲].

* closure and central limit theorems

جدول ۲۰-۶
مقادیر میانگین و انحراف‌های معیار برای عملیات جبری ساده بر روی متغیرهای تصادفی مستقل (غیرهمبسته).

تابع	میانگین (μ)	انحراف معیار ($\hat{\sigma}$)
a	a	0
x	μ_x	$\hat{\sigma}_x$
$x + a$	$\mu_x + a$	$\hat{\sigma}_x$
ax	$a\mu_x$	$a\hat{\sigma}_x$
$x + y$	$\mu_x + \mu_y$	$(\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2)^{1/2}$
$x - y$	$\mu_x - \mu_y$	$(\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2)^{1/2}$
xy	$\mu_x \mu_y$	$\mu_x \mu_y (C_x^2 + C_y^2 + C_x^2 C_y^2)^{1/2}$
x/y	μ_x/μ_y	$\mu_x/\mu_y \left[(C_x^2 + C_y^2)/(1 + C_y^2)\right]^{1/2}$
x^n	$\mu_x^n \left[1 + \frac{n(n-1)}{2} C_x^2\right]$	$\lvert n \rvert \mu_x^n C_x \left[1 + \frac{(n-1)^2}{2} C_x^2\right]$
$1/x$	$\frac{1}{\mu_x}(1 + C_x^2)$	$\frac{C_x}{\mu_x}(1 + C_x^2)$
$1/x^2$	$\frac{1}{\mu_x^2}(1 + 3C_x^2)$	$\frac{2C_x}{\mu_x^2}(1 + \frac{9}{2} C_x^2)$
$1/x^3$	$\frac{1}{\mu_x^3}(1 + 6C_x^2)$	$\frac{3C_x}{\mu_x^3}(1 + 2C_x^2)$
$1/x^4$	$\frac{1}{\mu_x^4}(1 + 10C_x^2)$	$\frac{4C_x}{\mu_x^4}(1 + \frac{25}{2} C_x^2)$
$\sqrt{x}$	$\sqrt{\mu_x}(1 - \frac{1}{8} C_x^2)$	$\frac{\sqrt{\mu_x}}{2} C_x (1 + \frac{1}{16} C_x^2)$
x^2	$\mu_x^2 (1 + C_x^2)$	$2\mu_x^2 C_x (1 + \frac{1}{2} C_x^2)$
x^3	$\mu_x^3 (1 + 3C_x^2)$	$3\mu_x^3 C_x (1 + C_x^2)$
x^4	$\mu_x^4 (1 + 6C_x^2)$	$4\mu_x^4 C_x (1 + \frac{9}{2} C_x^2)$

توجه: ضریب تغییرات متغیر تصادفی x برابر با $C_x = \hat{\sigma}_x/\mu_x$ است. برای ضرایب تغییرات کوچک، مربع آنها نسبت به واحد کوچک است. بنابراین نخستین جمله در توان عبارتهای x تقریب‌های بسیار خوبی هستند. برای حاصلضربها و خارج قسمت‌های همبسته به مرجع زیر نگاه کنید:

Charles R. Mischke, *Mathematical Model Building*, 2nd rev. ed., Iowa State University Press, Ames, 1980, App. C.

۲- به مرجع زیر نگاه کنید:

E. B. Haugen, *Probabilistic Mechanical Design*, Wiley, New York, 1980, pp. 49-54.

Scanned by CamScanner

مثال ۲۰-۷ یک میلگرد که تحت بار خمشی قرار دارد دارای قطر $d = LN(۲٫۰۰۰ , ۰٫۰۰۲)$ in است. این تساوی بیانگر این است که قطر میانگین برابر $\mu_d = ۲٫۰۰۰$ in و انحراف معیار آن $\hat{\sigma}_d = ۰٫۰۰۲$ in است. میانگین و انحراف معیار گشتاور دوم سطح میلگرد را پیدا کنید.

حل گشتاور دوم سطح از معادله زیر بدست می‌آید:

$$I = \frac{\pi d^۴}{۶۴}$$

ضریب تغییرات قطر برابر است با:

$$C_d = \frac{\hat{\sigma}_d}{\mu_d} = \frac{۰٫۰۰۲}{۲} = ۰٫۰۰۱$$

با استفاده از جدول ۲۰-۶،

جواب

$$\mu_I = (\pi/۶۴)\,\mu_d^۴\,(۱ + ۶C_d^۲) = (\pi/۶۴)(۲٫۰۰۰)^۴[۱ + ۶(۰٫۰۰۱)^۲] = ۰٫۷۸۵ \text{ in}^۴$$

جواب

$$\hat{\sigma}_I = ۴\mu_d^۳ C_d\,[۱ + (۹/۴)C_d^۲] = ۴(۲٫۰۰۰)^۳(۰٫۰۰۱)[۱ + (۹/۴)(۰٫۰۰۱)^۲] = ۰٫۰۶۴ \text{ in}^۴$$

این نتایج را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$I = LN(۰٫۷۸۵ , ۰٫۰۶۴) = ۰٫۷۸۵\, LN(۱ , ۰٫۰۸۱۵) \text{ in}^۴$$

۲۰-۵ برگشت خطی

رگرسیون

آمارشناس‌ها برای یافتن یک منحنی که بهترین انطباق با مجموعه‌ای از نقاط داده‌ای را داشته باشد از تحلیلی موسوم به «برگشت یا رگرسیون»* استفاده می‌کنند. هنگامی که این منحنی یک خط باشد آن را برگشت خطی می‌نامند. مفهوم واژه «بهترین» در جمله بالا، جای بحث و گفتگو دارد، چرا که معانی گوناگونی را می‌توان از آن استنباط کرد. روش معمول که در اینجا بکار می‌رود، خطی را به عنوان «بهترین» منحنی معرفی می‌کند که مربع انحراف نقاط داده‌ای از این خط کمینه باشد.

* regression

شکل ۲۰-۱۰ مجموعه‌ای از نقاط داده‌ای را نشان می‌دهد که توسط خط AB تقریب زده شده‌اند. معادله استاندارد یک خط راست به صورت زیر است:

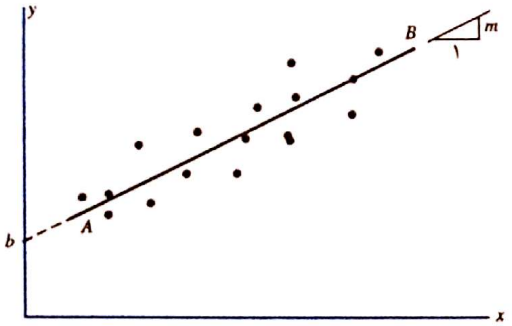
$$y = mx + b \qquad (۳۱-۲۰)$$

که m شیب و b عرض از مبداء است. مجموعه‌ای از N نقطه داده‌ای به صورت (x_i , y_i) را در نظر بگیرید. در حالت کلی، بهترین خط انطباق از هیچکدام از این نقاط نخواهد گذشت. بنابراین، می‌توان چنین نوشت:

$$y_i = mx_i + b + \epsilon_i \qquad (ب)$$

که $\epsilon_i = y_i - y$ انحراف بین نقطه i و خط است. مجموع مربعات این انحرافها از رابطه زیر بدست می‌آید[۳]:

$$\boxed{\varepsilon = \sum \epsilon_i^۲ = \sum (y_i + mx_i - b)^۲} \qquad (ج)$$



شکل ۲۰-۱۰ مجموعه‌ای از نقاط داده‌ای که توسط خط AB تقریب زده شده‌اند.

۳- از این به بعد، برای اختصار در نمادگذاری، حدود جمع $i(۱ , N)$ را دیگر نمایش نخواهیم داد.

Scanned by CamScanner

برای کمینه کردن مجموع مربعات خطاها ε که انتظار می‌رود یک نقطه کمینه ثابت باشد، لازم است که $\partial\varepsilon/\partial m = 0$ و $\partial\varepsilon/\partial b = 0$ باشد. به این ترتیب، دو معادله خواهیم داشت که می‌توان آنها را همزمان برای یافتن شیب و عرض از مبداء خط مورد نظر که به ترتیب آنها را با $\hat{m}$ و $\hat{b}$ نمایش می‌دهیم حل کرد. حل این معادلات منجر به نتایج زیر می‌شود:

$$\hat{m} = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2} \qquad (۳۲-۲۰)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i - \hat{m}\sum x_i}{N} = \bar{y} - \hat{m}\bar{x} \qquad (۳۳-۲۰)$$

وحلدوم

هنگامی که شیب و عرض از مبداء را پیدا کردیم، نکته بعدی این است که ببینیم همبستگی* x و y چگونه است. اگر نقاط داده‌ای در سراسر صفحه xy پراکنده شده باشند، روشن است که هیچگونه همبستگی وجود نخواهد داشت. اما اگر تمامی نقاط داده‌ای بر خط برگشت منطبق شوند، همبستگی کامل خواهد بود. بسیاری از داده‌های آماری بین این دو مرز قرار دارند. ضریب همبستگی* r که در محدودهٔ $-1 \le r \le +1$ قرار دارد، تدبیری است که برای پرسش به چگونگی همبستگی x و y اندیشیده شده است. ضریب همبستگی به صورت زیر تعریف می‌شود:

* correlation

* correlation coefficient

فرمول ضریب همبستگی

$$\boxed{r = \hat{m}\frac{s_x}{s_y}} \qquad (۳۴-۲۰)$$

که s_x و s_y به ترتیب انحراف معیار مختصات x و y داده‌هاست. اگر $r = 0$ باشد، هیچگونه همبستگی وجود ندارد؛ اگر $r = \pm 1$، همبستگی کامل است. مثبت یا منفی بودن r نشانگر این است که خط برگشت دارای شیب مثبت یا منفی است.

انحراف‌های معیار برای $\hat{m}$ و $\hat{b}$ از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$s_{\hat{m}} = \frac{s_{y.x}}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \qquad (۳۵-۲۰)$$

$$s_{\hat{b}} = s_{y.x}\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \qquad (۳۶-۲۰)$$

$$s_{y.x} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - \hat{b}\sum y_i - \hat{m}\sum x_i y_i}{N-2}} \qquad (۳۷-۲۰)$$

که $s_{y.x}$ انحراف معیار پراکندگی داده‌ها از خط برگشت است.

مثال ۲۰-۸ نمونه‌ای از یک فولاد با کربن متوسط را تحت آزمایش کشش قرار داده‌ایم. برای اندازه‌گیری میزان تغییر طول، یک کرنش‌سنج* بر روی نمونه تعبیه شده است. نیرو گذاشته و سپس برداشته می‌شود، در صورتی که کرنش ماندگار در نمونه ایجاد نشود، دوباره نیروی بزرگتری وارد می‌شود. تنشها و کرنشهای مربوط به آن را که به ترتیب با نمادهای σ و ϵ نمایش داده‌ایم، در جدول زیر می‌بینید:

* extensometer

σ, psi	۵۰۳۳	۱۰,۰۶۸	۱۵,۱۰۴	۲۰,۱۴۳	۳۵,۲۶۷
ϵ	۰٫۰۰۰۲۰	۰٫۰۰۰۳۰	۰٫۰۰۰۵۰	۰٫۰۰۰۶۵	۰٫۰۰۱۱۵

میانگین مدول یانگ $\bar{E}$ و انحراف معیار آن را پیدا کنید. چون کرنش‌سنج در حالت بدون بار یک طول اولیه را نشان می‌دهد از رابطه برگشت $y = mx + b$ استفاده کنید.

حل از جدول ۲۰-۷، $\bar{x} = 0{,}00280/5 = 0{,}00056$ و $\bar{y} = 85615/5 = 17123$ است. یک خط برگشت همیشه دارای یک مرکز هندسی* است، از معادله (۲۰-۳۲) داریم:

* centriod

جواب

$$\hat{m} = \frac{5\,(65{,}229) - 0{,}0028\,(85615)}{5\,(0{,}00000\,2125) - 0{,}0028^2} = 31{,}03\,(10^6)\ \text{psi} = \bar{E}$$

Scanned by CamScanner

از معادله (۲۰-۳۳)،

$$\hat{b} = \frac{۰٫۰۰۰۰۰۲۱۲۵\,(۸۵۶۱۵) - ۰٫۰۰۲۸۰\,(۶۵٫۲۲۹)}{۵\,(۰٫۰۰۰۰۰۲۱۲۵) - ۰٫۰۰۲۸^{۲}} = -۲۵۴٫۶۹ \text{ psi}$$

با محاسبه مقادیر s_x و s_y از معادله (۲۰-۳۴) داریم:

$$r = \frac{\hat{m}\, s_x}{s_y} = \frac{۳۱۰۳۱۵۹۷٫۸۵\,(۳۱۶۲۱۶۳۱۰^{-۴})}{۱۱۶۰۱٫۱۱} = ۰٫۹۹۸$$

از معادله (۲۰-۳۷)، پراکندگی اطراف خط برگشت توسط انحراف معیار $s_{y.x}$ اندازه گیری می‌شود و مقدار آن برابر است با:

$$s_{y.x} = \sqrt{\frac{\sum y^{۲} - \hat{b}\sum y - \hat{m}\sum xy}{N-۲}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲۰۰۴۳۲۸۲۶۷ - (-۲۵۴٫۶۹)\,۸۵۶۱۵ - ۳۱٫۰۳\,(۱۰^{۶})(۶۵٫۲۲۹)}{۵-۲}} = ۸۱۱٫۱ \text{ psi}$$

از معادله (۲۰-۳۵)، انحراف معیار $\hat{m}$ چنین است:

$$s_{\hat{m}} = \frac{s_{y.x}}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^{۲}}} = \frac{۸۱۱٫۱}{\sqrt{۰٫۰۰۰۰۰۰۰۵۵۸}} = ۱٫۰۸۶\,(۱۰^{۶}) \text{ psi} = s_E$$

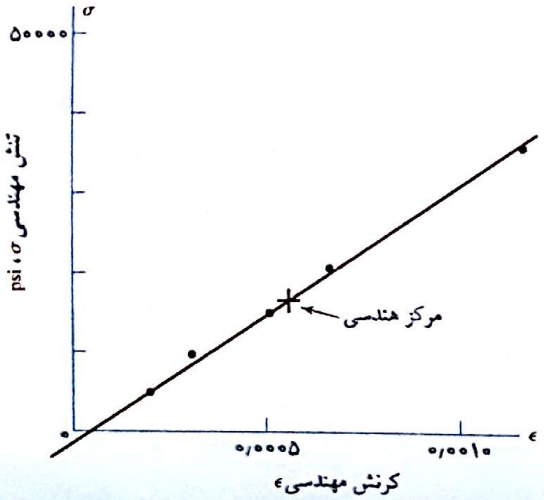
جواب

برای دیدن خط برگشت به شکل ۲۰-۱۱ نگاه کنید.

جدول ۲۰-۱۱
کاربرگ مثال ۲۰-۶.

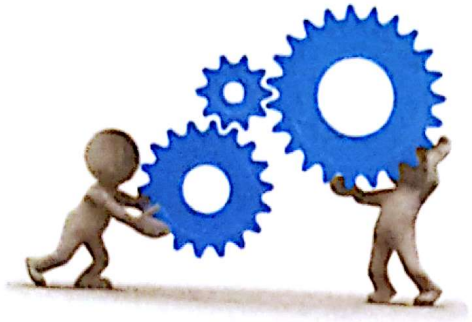
y σ, psi	x ϵ	$x^{۲}$	xy	$y^{۲}$	$(x-\bar{x})^{۲}$
۵۰۳۳	۰٫۰۰۰,۲۰	۰٫۰۰۰,۰۰۰,۰۴۰	۱٫۰۰۶,۶۰۰	۲۵,۳۳۰,۰۸۹	۰٫۰۰۰,۰۰۰,۱۳۰
۱۰۰۶۸	۰٫۰۰۰,۳۰	۰٫۰۰۰,۰۰۰,۰۹۰	۳٫۰۲۰,۴۰۰	۱۰۱,۳۶۴,۶۲۴	۰٫۰۰۰,۰۰۰,۰۶۹
۱۵۱۰۴	۰٫۰۰۰,۵۰	۰٫۰۰۰,۰۰۰,۲۵۰	۷٫۵۵۲,۰۰۰	۲۲۸,۱۳۰,۸۱۶	۰٫۰۰۰,۰۰۰,۰۰۴
۲۰۱۴۳	۰٫۰۰۰,۶۵	۰٫۰۰۰,۰۰۰,۴۲۳	۱۳٫۰۹۲,۹۵۰	۴۰۵,۷۴۰,۴۴۹	۰٫۰۰۰,۰۰۰,۰۰۸
۳۵۲۶۱	۰٫۰۰۱,۱۵	۰٫۰۰۰,۰۰۱,۳۲۳	۴۰٫۵۵۷,۰۵۰	۱,۲۴۳,۷۶۱,۲۸۹	۰٫۰۰۰,۰۰۰,۳۴۸
۸۵۶۱۵	۰٫۰۰۲,۸۰	۰٫۰۰۰,۰۰۲,۱۲۵	۶۵٫۲۲۹,۰۰۰	۲,۰۰۴,۳۲۸,۲۶۷	Σ ۰٫۰۰۰,۰۰۰,۵۵۶

توجه: $\bar{y}$ = ۸۵۶۱۵/۵ = ۱۷۱۲۳ psi و $\bar{x}$ = ۰٫۰۰۲۸۰/۵ = ۰٫۰۰۰۵۶.



شکل ۲۰-۱۱
نمودار داده‌های مثال ۲۰-۸. خط برگشت از مرکز هندسی می‌گذرد و مربع انحراف نقاط از این خط کمترین مقدار است.

Scanned by CamScanner



مسائل

۲۰-۱ نتایج حاصل از آزمایش خستگی ۶۹ نمونه از یک محموله میله شش‌گوش فولادی ۵۱۶۰H به قطر ۱٫۲۵ in در جدول زیر آمده است. قطعات تحت تنش خمشی کاملاً معکوس‌شونده* با دامنه ثابت تا نقطه شکست آزمایش شده‌اند.

*completely reversed

L	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰	۱۱۰	۱۲۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۸۰	۱۹۰	۲۰۰	۲۱۰
f	۲	۱	۳	۵	۸	۱۲	۶	۱۰	۸	۵	۲	۳	۲	۱	۰	۱

که L عمر قطعه برحسب هزار دور، و f فراوانی رده شکست‌هاست.

(الف) نمودار ستونی داده‌ها را برحسب فراوانی رده f رسم کنید.

(ب) میانگین و انحراف معیار عمر برای جمعیتی که نمونه‌ها از آن انتخاب شده‌اند را محاسبه کنید.

۲۰-۲ نتایج حاصل از ۱۹۷ مورد آزمایش برای تعیین استحکام کششی نهایی S_{ut} یک ورق فولادی (17-7PH، شرایط TH ۱۰۵۰)، با اندازه‌های از ۰٫۰۱۶ تا ۰٫۰۶۲ in که در هفت رده ترکیب شده‌اند را در زیر می‌بینید:

S_{ut} , kpsi	۱۷۴	۱۸۲	۱۹۰	۱۹۸	۲۰۶	۲۱۴	۲۲۲
فراوانی f	۶	۹	۴۴	۶۷	۵۳	۱۲	۶

که f فراوانی رده است. میانگین و انحراف معیار را پیدا کنید.

۲۰-۳ برای تعیین استحکام تسلیم با انحراف ۰٫۲ درصد* S_y، بر روی ۵۸ عدد میله فولادی سرد کشیده AISI ۱۰۱۸ آزمایش کشش انجام گرفته است که نتایج آن را در جدول زیر می‌بینید:

*0.2 percent offset yield strength

S_y , kpsi	۶۴	۶۸	۷۲	۷۶	۸۰	۸۴	۸۸	۹۲
فراوانی f	۲	۶	۶	۹	۱۹	۱۰	۴	۲

که S_y میانه رده و f فراوانی رده است. میانگین و انحراف معیار S_y و تابع چگالی احتمال (PDF) را با فرض طبیعی بودن توزیع، محاسبه کنید.

۲۰-۴ لگاریتم مبنای ۱۰ از ۵۵ آزمایش خستگی منجر به شکست برای نمونه‌هایی که تحت سطح ثابتی از تنش خستگی قرار گرفته‌اند را در جدول زیر می‌بینید:

y	۵٫۶۲۵	۵٫۸۷۵	۶٫۱۲۵	۶٫۳۷۵	۶٫۶۲۵	۶٫۸۷۵	۷٫۱۲۵	۷٫۳۷۵	۷٫۶۲۵	۷٫۸۷۵	۸٫۱۲۵
f	۱	۰	۰	۳	۳	۶	۱۴	۱۵	۱۰	۲	۱

که y میانه رده و f فراوانی رده است.

(الف) میانگین و انحراف معیار جمعیتی را که نمونه‌ها از آن انتخاب شده‌اند محاسبه کنید و تابع چگالی احتمال را برای یک توزیع طبیعی بدست آورید.

(ب) نمودار ستونی را رسم کنید و فراوانی رده حاصل از انطباق طبیعی را با آن مقایسه نمایید.

۲۰-۵ یک ماشین تراش خودکار برای تولید قطعاتی با قطر اسمی ۰٫۵۰۰۰ in تنظیم شده است. پس از اینکه دستگاه در اثر سایش ابزار آن، قطعاتی با قطر بیش از ۰٫۵۰۰۸ in تولید می‌کند، دوباره تنظیم می‌شود. قطعات تولید شده کاملاً مخلوط می‌شوند به گونه‌ای که توزیعی یکنواخت از قطرها بدست می‌آید.

Scanned by CamScanner

(الف) میانگین و انحراف معیار محموله بزرگی از قطعات را از زمان یک تنظیم تا تنظیم دوباره دستگاه محاسبه کنید.

(ب) عبارتهای PDF و CDF این جمعیت را پیدا کنید.

(ج) اگر هنگام بازرسی، قطعات با قطر کمتر از in ۰٫۵۰۰۲ کنار گذاشته شوند، PDF و CDF جدید و همچنین میانگین و انحراف معیار قطعات باقی‌مانده چه خواهد بود؟

۶-۲۰ تنها نقشه تفصیلی موجود از یک قطعه به گونه‌ای مخدوش شده است که اندازه‌های روی آن قابل خواندن نیست. ۱۰۰۰ عدد از قطعه مورد نظر به وسیله یک ماشین‌تراش خودکار تولید شده و در انبار نگهداری می‌شود. با نمونه گیری تصادفی ۵۰ عدد از این قطعات، قطر میانگین آنها $\bar{d} = ۰٫۶۲۴۱$ in و انحراف معیار آنها $s = ۰٫۰۰۰۵۸۱$ in بدست آمد. دقت اندازه‌های تلرانس‌دار بر روی نقشه یک‌هزارم اینچ است. اطلاعات مخدوش شده روی نقشه را پیدا کنید.

۷-۲۰ (الف) CDF متغیر تصادفی x برابر $F(x) = ۰٫۵۵۵x - ۳۳$ است، که x برحسب میلی‌متر است. PDF، میانگین، انحراف معیار و اعداد حدی این توزیع را پیدا کنید.

(ب) در عبارت $\sigma = F/A$، نیروی $F = LN(۳۶۰۰ , ۳۰۰)$ lbf و سطح $A = LN(۰٫۱۱۲ , ۰٫۰۰۱)$ in^۲ است. میانگین، انحراف معیار، ضریب تغییرات و توزیع σ را محاسبه کنید.

۸-۲۰ یک مدل برگشت به صورت $y = a_۱x + a_۲x^۲$ مورد نیاز است. معادلات طبیعی را بنویسید:

$$\sum y = a_۱ \sum x + a_۲ \sum x^۲$$
$$\sum xy = a_۱ \sum x^۲ + a_۲ \sum x^۳$$

سپس نشان دهید که:

$$a_۱ = \frac{\sum y \sum x^۳ - \sum xy \sum x^۲}{\sum x \sum x^۳ - (\sum x^۲)^۲} \quad \text{و} \quad a_۲ = \frac{\sum x \sum xy - \sum y \sum x^۲}{\sum x \sum x^۳ - (\sum x^۲)^۲}$$

برای مجموعه داده‌های زیر،

x	۰٫۰	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۶	۰٫۸	۱٫۰
y	۰٫۰۱	۰٫۱۵	۰٫۲۵	۰٫۲۵	۰٫۱۷	-۰٫۰۱

معادله برگشت را پیدا کنید و داده‌ها را با این مدل برگشت رسم نمایید.

۹-۲۰ «لندگراف»* نتایج زیر را برای استحکام دوام محوری (کششی-فشاری) فولادهایی با استحکامهای نهایی مختلف منتشر کرد:

*R. W. Landgraf

S_e'	S_u	S_e'	S_u	S_e'	S_u
۹۶	۲۸۰	۱۱۴	۳۲۵	۲۹٫۵	۶۵
۹۹	۲۹۵	۱۰۹	۲۳۸	۳۰	۶۰
۴۸	۱۲۰	۶۷	۱۳۰	۴۵	۸۲
۸۴	۱۸۰	۸۷	۲۰۷	۴۸	۶۴
۷۵	۲۱۳	۹۶	۲۰۵	۵۱	۱۰۱
۱۰۶	۲۴۲	۹۹	۲۲۵	۵۰	۱۱۹
۶۰	۱۳۴	۱۱۷	۳۲۵	۷۸	۱۹۵
۶۴	۱۴۵	۱۲۲	۳۵۵	۸۷	۲۱۰
۱۱۶	۲۲۷	۸۷	۲۲۵	۱۰۵	۲۳۰
				۱۰۵	۲۶۵

(الف) داده‌ها را با S_e' بر روی محور عرض‌ها و S_u بر روی محور طول‌ها رسم کنید.

(ب) با استفاده از مدل برگشت خطی $y = mx + b$، خط برگشت را پیدا کرده، آن را رسم نمایید.

۱۰-۲۰ در مطالعات مربوط به خستگی، استفاده از سهمی نوع «گربر» به صورت زیر مفید خواهد بود (به بخش ۶-۱۲ نگاه کنید):

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \left(\frac{\sigma_m}{S_{ut}}\right)^۲ = ۱$$

با حل معادله بالا برای σ_a داریم،

$$\sigma_a = S_e - \frac{S_e}{S_{ut}^۲}\sigma_m^۲$$

Scanned by CamScanner

این شکل معادله، یک مدل برگشت به صورت $y = a_0 + a_1 x^2$ ایجاد می‌کند. نشان دهید که معادلات طبیعی برابرند با:

$$\sum y = n a_0 + a_1 \sum x^2$$
$$\sum xy = a_0 \sum x + a_1 \sum x^3$$

و اینکه:

$$a_0 = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x^2 \sum xy}{n \sum x^2 - \sum x \sum x^2} \quad \text{و} \quad a_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - \sum x \sum x^2}$$

داده‌های زیر را رسم کنید:

x	۲۰	۴۰	۶۰	۸۰
y	۱۹	۱۷	۱۳	۷

و بر روی نمودار خط برگشت منطبق نمایید.

۲۰-۱۱ داده‌های زیر که برای یک فنر مارپیچ کششی با کشش اولیه F_i و ضریب فنریت k که با رابطه $F = F_i + kx$ به هم مربوط می‌شوند را در نظر بگیرید. x تغییر طول فنر از حالت اولیه آن است:

x, in	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۶	۰٫۸	۱٫۰	۲٫۰
F, lbf	۷٫۱	۱۰٫۳	۱۲٫۱	۱۳٫۸	۱۶٫۲	۲۵٫۲

(الف) میانگین و انحراف معیار کشش اولیه F_i را محاسبه کنید.

(ب) میانگین و انحراف معیار ضریب فنریت k را محاسبه کنید.

۲۰-۱۲ در رابطه کرنش تک‌محوری $\epsilon = \delta/l$، افزایش طول به صورت $\delta \sim (۰٫۰۰۰۰۹۲ , ۰٫۰۰۰۱۵)$ in و طول به صورت $l \sim (۲٫۰۰۰۰ , ۰٫۰۰۰۸۱)$ in بیان می‌شوند. میانگین، انحراف معیار، و ضریب تغییرات کرنش ϵ را پیدا کنید.

۲۰-۱۳ در قانون «هوک» برای تنش تک‌محوری، $\sigma = \epsilon E$، کرنش به صورت $\epsilon \sim (۰٫۰۰۰۰۳۴ , ۰٫۰۰۰۵)$ و مدول «یانگ» به صورت $E \sim (۲۹٫۵ , ۰٫۸۸۵)$ Mpsi داده شده است. میانگین، انحراف معیار، و ضریب تغییرات تنش σ را برحسب psi پیدا کنید.

۲۰-۱۴ افزایش طول میله یکنواختی که تحت کشش قرار دارد با رابطه $\delta = Fl/AE$ تعیین می‌شود. فرض کنید متغیرهای این معادله، متغیرهای تصادفی هستند و دارای پارامترهای زیر می‌باشند:

$$F \sim (۱۴٫۷ , ۱٫۳)\text{kip} \qquad A \sim (۰٫۲۲۶ , ۰٫۰۰۳)\text{in}^2$$
$$l \sim (۱٫۵ , ۰٫۰۰۴)\text{in} \qquad E \sim (۲۹٫۵ , ۰٫۸۸۵)\text{Mpsi}$$

میانگین، انحراف معیار، و ضریب تغییرات افزایش طول δ را برحسب اینچ پیدا کنید.

۲۰-۱۵ بیشترین تنش خمشی در یک میلگرد در سطح خارجی آن رخ می‌دهد و با رابطه $\sigma = ۳۲M/\pi d^3$ تعیین می‌شود. اگر گشتاور خمشی به صورت $M \sim (۱۵۰۰۰ , ۱۳۵۰)$ lbf·in و قطر میله به صورت $d \sim (۲٫۰۰ , ۰٫۰۰۵)$ in بیان شود، میانگین، انحراف معیار، و ضریب تغییرات تنش σ را برحسب psi پیدا کنید.

۲۰-۱۶ هنگامی که در جریان فرآیند تولید انبوه یک قطعه، ابعاد آن خارج از محدوده تلرانس باشد، بازرسی کیفیت، قطعات زیر اندازهٔ مجاز یعنی $x < x_1$ (با کسر α) و بالای اندازه مجاز، یعنی $x > x_2$ (با کسر β) را کنار می‌گذارد. جمعیت باقیمانده دارای تابع چگالی جدید $g(x)$ است که با مضرب a به تابع چگالی اولیه $f(x)$ مربوط می‌شود. این بدین علت است که هر دو پیشامد دلخواه x_1 و x_2 دارای احتمال نسبی وقوع یکسانی مانند گذشته هستند. نشان دهید که:

$$a = \frac{1}{F(x_2) - F(x_1)} = \frac{1}{1 - (\alpha + \beta)}$$

و

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(x_2) - F(x_1)} = \dfrac{f(x)}{1 - (\alpha + \beta)} & x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

۲۰ - ۱۷ یک ماشین تراش خودکار قطعه‌ای با توزیع یکنواخت $d = U[0.748, 0.751]$ in را به طور انبوه تولید می‌کند. این ماشین علت است که پس از رسیدن اندازه قطعات به ۰٫۷۵۰ in دستگاه تنظیم مجدد نشده است. اعداد حدی را درون کروشه می‌بینید.

(الف) میانگین، انحراف معیار، و PDF محصولات را چنانچه قطعات کاملاً مخلوط شوند محاسبه کنید.

(ب) با استفاده از نتایج مسئله ۲۰-۱۶، میانگین، انحراف معیار، و PDF جدید را پیدا کنید. با انطباق دو نمودار PDF، آنها را مقایسه نمایید.

۲۰ - ۱۸ یک شرکت سازنده، فنرهای مارپیچ با ضریب فنریت $k = 10 \pm 1$ lbf/in تولید می‌کند. آزمایش فنرها نشان می‌دهد که توزیع ضریب فنریت‌ها را به خوبی می‌توان با توزیع طبیعی تقریب زد. بازرسی کیفیت نشان می‌دهد که ۸٫۱ درصد از فنرها با $k < 9$ و ۵٫۵ درصد با $k > 11$ کنار گذاشته می‌شوند. تابع چگالی احتمال را پیدا کنید.

۲۰ - ۱۹ عمر قطعات معمولاً با تعداد سیکل‌های کاری که درصد مشخصی از جمعیت مورد نظر پیش از شکست آزمایشی تحمل می‌کنند مشخص می‌شود. نماد L برای نشان دادن این عمر بکار می‌رود. برای مثال، عمر L_{10} یعنی تعداد سیکلی است که توسط ۹۰ درصد از جمعیت این قطعه پیش از شکست تحمل شده است. با استفاده از میانگین و انحراف معیار داده‌های مسئله ۲۰-۱، و یک مدل توزیع طبیعی، عمر L_{10} مربوطه را محاسبه کنید.

۲۰ - ۲۰ یک توزیع طبیعی مناسب برای نمودار ستونی مسئله ۲۰-۱ پیدا کنید. تابع چگالی احتمال را بر روی نمودار ستونی $f/(Nw)$ انطباق دهید.

۲۰ - ۲۱ برای مسئله ۲۰-۲، یک نمودار ستونی با $f/(Nw)$ بر روی محور عرض‌ها رسم کنید و یک تابع چگالی احتمال با توزیع طبیعی بر آن انطباق دهید.

۲۰ - ۲۲ برای مسئله ۲۰-۳، یک نمودار ستونی با $f/(Nw)$ بر روی محور عرض‌ها رسم کنید و یک تابع چگالی احتمال با توزیع طبیعی بر آن انطباق دهید.

۲۰ - ۲۳ یک فولاد سردکشیده ۱۰۱۸ دارای استحکام تسلیم کششی $S_y = N(78.4, 5.90)$ kpsi است. یک میلگرد از این فولاد تحت بار کششی $P = N(40, 8.5)$ kip قرار می‌گیرد. اگر قطر میله $d = 1.000$ in باشد، احتمال اینکه یک بار کششی استاتیک تصادفی P از بردار متغیرهای تصادفی P وارد بر ساقه میله‌ای با استحکام تسلیم S_y از بردار S_y موجب تسلیم آن نشود چقدر است؟

۲۰ - ۲۴ یک فولاد نورد گرم شده ۱۰۳۵ دارای استحکام تسلیم کششی $S_y = LN(49.6, 3.81)$ kpsi است. یک میلگرد از این فولاد تحت بار کششی $P = LN(30, 5.1)$ kip قرار می‌گیرد. اگر قطر میله $d = 1.000$ in باشد، احتمال اینکه یک بار کششی استاتیک تصادفی P از بردار متغیرهای تصادفی P وارد بر ساقه میله‌ای با استحکام تسلیم S_y از بردار S_y موجب تسلیم آن نشود چقدر است؟

۲۰ - ۲۵ نتایج آزمایش استحکام کششی تسلیم با انحراف ۰٫۲ درصد برای فولاد سرد کشیده AISI ۱۱۳۷ بر روی نمونه‌هایی با قطر تقریبی ۱ in را در زیر می‌بینید. نمونه‌های آزمایش برگرفته از ۲۵ محموله فولاد تولید شده توسط دو کارخانه متفاوت است:

S_y	93	95	97	99	101	103	105	107	109	111
f	19	25	38	17	12	10	5	4	4	2

که S_y میانه رده برحسب kpsi و f فراوانی هر رده است. با فرض توزیع طبیعی، کدام استحکام تسلیم است که استحکام تسلیم ۹۹ درصد جمعیت از آن بیشتر است؟

۲۰ - ۲۶ مسئله ۲۰-۲۵ را با فرض توزیع لگاریتمی طبیعی تکرار کنید. کدام استحکام تسلیم است که استحکام تسلیم ۹۹ درصد جمعیت از آن بیشتر است؟ انطباق توزیع طبیعی در مسئله ۲۰-۲۵ را با انطباق توزیع لگاریتمی طبیعی به کمک برهم‌نهی PDF ها و PDF حاصل از نمودار ستونی مقایسه کنید.

۲۰ - ۲۷ یک فولاد آبداده* ۱۰۴۶ که برای دو ساعت در دمای ۱۲۱۰ °F آبگیری** شده است، دارای میانگین استحکام کششی ۱۰۵ kpsi و میانگین استحکام تسلیم ۸۲ kpsi است. داده‌های آزمایش استحکام دوام در عمر 10^6 cycles چنین است: $(S'_e)_{10^6} = W[79, 86.2, 2.60]$ kpsi. میانگین، انحراف معیار و ضریب تغییرات $(S'_e)_{10^6}$ را پیدا کنید.

* *water quenched* ** *tempering*

Scanned by CamScanner

۲۰ - ۲۸ نتایج آزمایش استحکام کششی نهایی یک چدن ASTM ۴۰، $S_{ut} = W[۲۷٫۷ , ۴۶٫۲ , ۴٫۳۸]$ kpsi است. میانگین و انحراف معیار S_{ut}، و احتمال اینکه استحکام نهایی کمتر از ۴۰ kpsi باشد را محاسبه کنید.

۲۰ - ۲۹ فولاد ضدزنگ سردکشیده ۳۰۱SS دارای استحکام کششی نهایی $S_{ut} = W[۱۵۱٫۹ , ۱۹۳٫۶ , ۸٫۰۰]$ kpsi است. میانگین و انحراف معیار آن را پیدا کنید.

۲۰ - ۳۰ استحکامهای کششی و تسلیم برای آهن کروی* ۰۴-۷۰-۱۰۰ به صورت زیر است:

$$S_{ut} = W[۴۷٫۶ , ۱۲۵٫۶ , ۱۱٫۸۴] \text{ kpsi}$$
$$S_y = W[۶۴٫۱ , ۸۱٫۰ , ۳٫۷۷] \text{ kpsi}$$

احتمال اینکه S_{ut} کمتر از ۱۰۰ kpsi باشد چقدر است؟ و احتمال اینکه S_y کمتر از ۷۰ kpsi باشد چقدر است؟

* *nodular iron*

۲۰ - ۳۱ آزمایش کشش بر روی نمونه‌های زیادی از یک پیچ که از فولاد ۱۰۳۸ با عملیات حرارتی ساخته شده است، نتیجهٔ مقابل را بدست می‌دهد: $S_{ut} = W[۱۲۲٫۳ , ۱۳۴٫۶ , ۳٫۶۴]$ kpsi. احتمال اینکه این پیچ‌ها مقتضیات کمترین استحکام کششی ۱۲۰ kpsi مربوط به فولادهای SAE۵ را برآورده کنند چقدر است؟ همین احتمال را برای کمترین استحکام کششی ۱۳۳ kpsi فولادهای SAEV پیدا کنید.

۲۰ - ۳۲ یک فولاد ۵۱۶۰H مورد آزمایش خستگی قرار گرفت و توزیع تعداد سیکل‌های منجر به شکست در سطح ثابتی از تنش به صورت مقابل پیدا شد: $n = W[۳۶٫۹ , ۱۳۳٫۶ , ۲٫۶۶]$ در $۱۰^۳$ سیکل. با داشتن میانگین و انحراف معیار یکسان، PDF مربوط به n و PDF توزیع لگاریتمی طبیعی را رسم کنید. عمر L۱۰ که توسط هر یک از این توزیع‌ها پیش‌بینی می‌شود را پیدا کنید (برای توضیح نماد L۱۰ به مسئله ۲۰-۱۹ نگاه کنید).

۲۰ - ۳۳ تعداد ۱۰۰ نمونه از یک ماده برای تعیین تعداد دورهای منجر به شکست، تحت بارگذاری کاملاً معکوس شونده قرار گرفتند، که نتایج آن را در زیر می‌بینید:

L ($۱۰^{-۵}$)	۳٫۰۵	۳٫۵۵	۴٫۰۵	۴٫۵۵	۵٫۰۵	۵٫۵۵	۶٫۰۵	۶٫۵۵	۷٫۰۵	۷٫۵۵	۸٫۰۵	۸٫۵۵	۹٫۰۵	۹٫۵۵	۱۰٫۰۵
f	۳	۷	۱۱	۱۶	۲۱	۱۳	۱۳	۶	۲	۰	۴	۳	۰	۰	۱

که L عمر قطعه برحسب دور و f فراوانی هر رده است. با فرض یک توزیع لگاریتمی طبیعی، نمودار تئوری PDF و نمودار ستونی PDF را برای مقایسه رسم کنید.

۲۰ - ۳۴ استحکام کششی نهایی فولاد سرد کشیده AISI ۱۱۱۷ دارای توزیع «وایبول» $S_u = W[۷۰٫۳ , ۸۴٫۴ , ۲٫۰۱]$ است. میانگین، انحراف معیار، و ضریب تغییرات آن را پیدا کنید.

۲۰ - ۳۵ یک آهن کروی ۱۵-۴۵-۶۰ دارای استحکام تسلیم S_y با میانگین ۴۹٫۰ kpsi، انحراف معیار ۴٫۲ kpsi، و استحکام تسلیم تضمین شده ۳۳٫۸ kpsi است. پارامترهای وایبول θ و b را پیدا کنید.

۲۰ - ۳۶ استحکام تسلیم یک آهن چکش‌خوار* ۳۵۰۱۸ به صورت $S_y = W[۳۴٫۷ , ۳۹٫۰ , ۲٫۹۳]$ kpsi با توزیع «وایبول» بیان می‌شود. میانگین، انحراف معیار، و ضریب تغییرات آن را پیدا کنید.

* *malleable iron*

۲۰ - ۳۷ نتایج آزمایشهای بارگذاری یکنواخت بر روی ۲۳۷ عدد یاتاقان غلتشی در جدول زیر آمده است:

L	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
f	۱۱	۲۲	۳۸	۵۷	۳۱	۱۹	۱۵	۱۲	۱۱	۹	۷	۵

که L عمر قطعه برحسب میلیون دور و f تعداد شکست‌هاست. یک توزیع لگاریتمی طبیعی را بر این داده‌ها انطباق دهید و نمودار تئوری PDF را به همراه نمودار ستونی PDF رسم کنید. از این توزیع لگاریتمی طبیعی، عمری را که در آن ۱۰ درصد از یاتاقانها تحت این بارگذاری یکنواخت خواهند شکست پیدا کنید.

Scanned by CamScanner