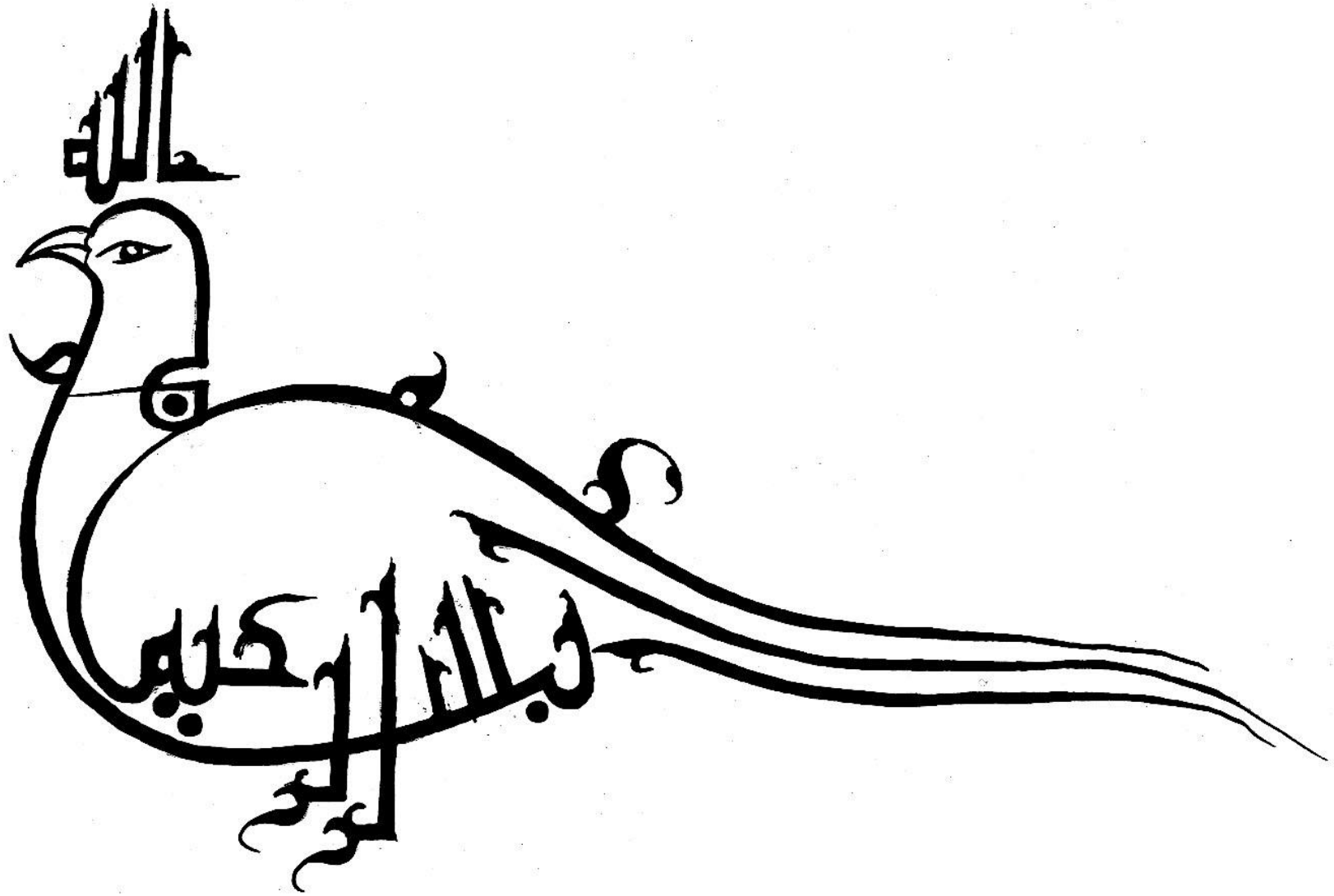


برخی از کاربردهای انتگرال

دکتر علیرضا امیری اسفرجانی

فهرست

- محاسبه مساحت
- مساحت بین دو منحنی
- محاسبه طول قوس یک منحنی
- حجم حاصل از دوران یک منحنی در فاصله‌ی مشخص
- مساحت یک سطح دوار
- مرکز ثقل
- ...

مساحت

محاسبه مساحت

مساحت بین منحنی و محور x ها در فاصله مورد نظر

$$\int_a^b |f(x)|dx \qquad [a \;\; b]$$

مثال

$$f(x) = x\sqrt{x^2+5} \qquad [\circ \quad 2]$$

مثال

$$f(x) = x^2 - 4x \qquad [1 \;\; 3]$$

مثال

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \qquad [-1 \quad 2]$$

$$f(1) = \circ$$

مساحت بین دو منحنی:

$$\int_a^b |g(x) - f(x)| dx$$

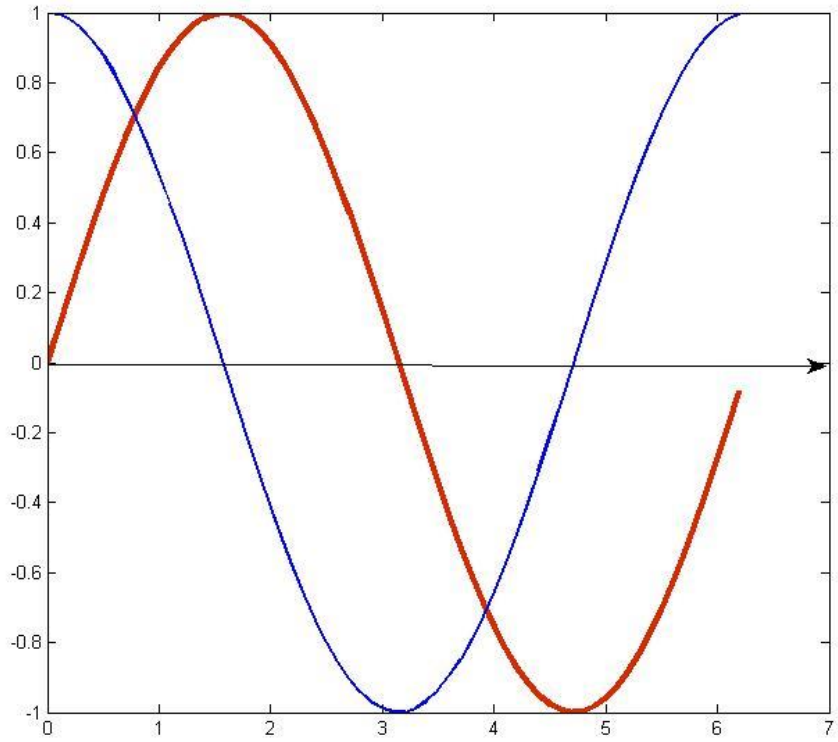
$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \qquad f(x) \rangle g(x)$$

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \qquad f(x) \langle g(x)$$

مثال

$$f(x) = \sin(x) \qquad \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$g(x) = Cos(x)$$



مثال

$$\begin{cases} x = -y^2 + 4 \\ \text{و محور yها} \end{cases}$$

راه حل اول:

راه حل دوم:

مثال

$$y = x - 5$$

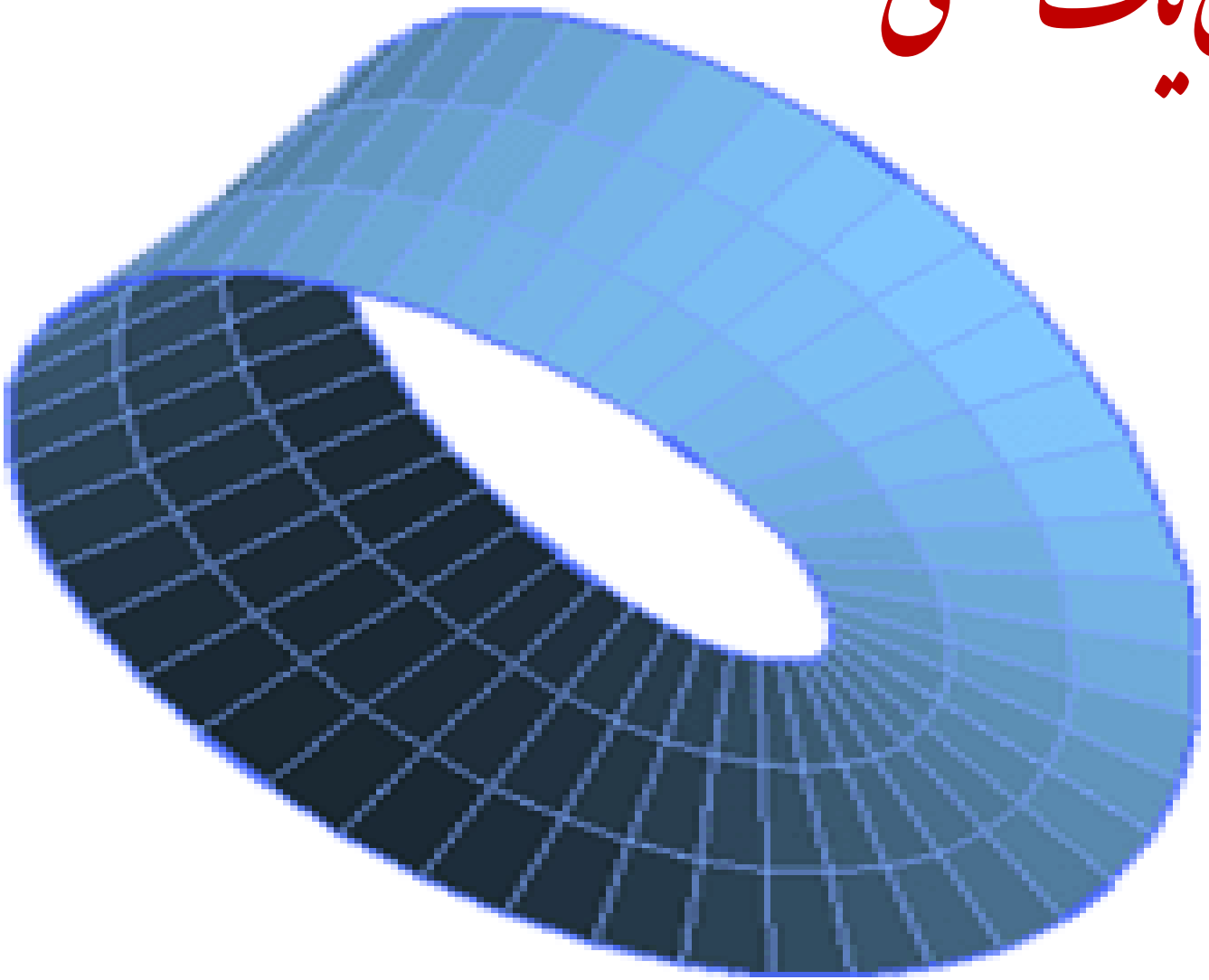
$$y^2 = 2x - 2$$

مثال

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$y = x^2 - 4x$$

طول قوس یک منحنی



محاسبه طول قوس یک منحنی

اگر $y = f(x)$ تابعی مشتق پذیر در فاصله (a,b) باشد آنگاه طول قوس تابع $y = f(x)$ برابر است با:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,.dx = \int_a^b \sqrt{1+(f(x)')^2}\,.dx$$

Proof

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$S = Lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta s = Lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = Lim_{\Delta x\to 0} \sum \sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\ \Delta x$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

نکته:

$$S = \int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} =$$

اگر معکوس پذیر باشد.

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{(\frac{dx}{dy})^2+1}\; df(x)$$

نکته:

$$S = \int_{t_\circ}^{t_1} \sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\;\; dt$$

$$x = f(t) \qquad dx = f'(t)\,d(t)$$
$$y = g(t) \qquad dy = g'(t)d(t) \Rightarrow (dx)^2+(dy)^2 =$$

نکته:

$$S = \int_a^c \sqrt{1+y'^2}\,dx + \int_c^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

مثال

طول قوس منحنی $y = f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ را بیابید.

ب) $[-1 \quad 8]$

الف) $[1 \quad 8]$

الف)

ب)

مثال

$$x = t - \sin(t)$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

$$y = 1 - \sin(t)$$

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le t \le 2\pi \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

نکته:

هذلولی

$$\begin{aligned} x &= a\ \cosh(t) \\ y &= b\ \sinh(t) \end{aligned}$$

بیضی

$$\begin{cases} x = a\ \cos t \\ y = b\ \sin t \end{cases}$$

دایره

$$\begin{cases} x = a\ \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

مثال

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

حجم حاصل از دوران

حجم حاصل از دوران یک منحنی در فاصله‌ی مشخص:

۱- دوران حول محور xها

$$V = \int_{x_1=a}^{x_2=b} \pi\ f^2(x)dx$$

۲- دوران حول محور yها

$$y = f(x) \Rightarrow x = g(y)$$

$$V = \int_{y_1=c}^{y_2=d} \pi\ g^2(y).dy$$

مثال: حجم حاصل از دوران منحنی $4y = 20 - x^2$ **در** $[2\sqrt{2} \quad 4]$ **را بدست آورید. (حول هر دو محور)**

حول محور Yها

حول محور Xها

مثال: حجم حاصل از دوران منحنی $x^2+y^2=r^2$ در $[-r \quad r]$ را بدست آورید.

دوران حول محور X

تمرین

حجم حاصل از دوران منحنی $z^2 + y^2 = a^2$ **در** $[-a \quad a]$ **را بدست آورید؟**

حجم حاصل از دوران فاصله بین دومنحنی

حول محور Xها و Yها

$$V = \int_a^b \pi \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx$$

$$V = \int_a^b \pi \left| d^2(y) - C^2(y) \right| dy$$

مثال: حجم حاصل از دوران ناحیه بین دو منحنی زیر حول محور Xها را بدست آورید؟

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

مساحت یک سطح دوار

مساحت یک سطح دوار

$$S = \int_{s_1}^{s_2} 2\pi \, y(x) \, ds$$

نکته:

$$S = \int_{s_1}^{s_2} 2\pi\, y(x)\, ds = \int_{a}^{b} 2\pi\, y(x) \sqrt{1+(y(x)')^2}\, dx$$

$$S = \int_{s_1}^{s_2} 2\pi\, x(y)\, ds = \int_{c}^{d} 2\pi\, x(y) \sqrt{1+(x(y)')^2}\, dy$$

$$S = \int_{t_\circ}^{t_1} 2\pi\, g(t) \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt \qquad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

مثال: مساحت حاصل از دوران $y = \sqrt{x}$ حول محور Xها $[0 \quad 3]$

مثال: مساحت جانبی را بدست آورید؟

$$x = t - \sin t$$
$$y = 1 - \cos t$$

مثال: مساحت روی این منحنی، که دوران یافته حول محور Xها است؟

$$x = 2 \pm \sqrt{1 - y^2}$$

مثال: مساحت به وجود آمده حاصل از چرخش $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t \end{cases}$ حول محور Yها $[\circ \quad 1]$

$$\sqrt{f'^2 + g'^2} = \sqrt{(2t)^2 + 2^2} = 2\sqrt{t^2 + 1}$$

مثال: مساحت حاصل از دوران دایره ی $a^2 = y^2 + x^2$ حول خط $y = -a$ را بیابید.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

مرکز ثقل

مرکز ثقل خط راست

اگر چگالی خطی یک میله در فاصله $[0 \quad L]$ برابر با $\delta(L)$ آنگاه نقطه تعادل (مرکز ثقل) میله برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x.\delta(x)dx}{\int_0^L \delta(x)dx}$$

مثال: میله ای به طول ۳ واحد بطوریکه چگالی خطی آن $\delta(x)=1+2x$ **باشد که در آن** x **فاصله نقطه تا ایتدای میله است مرکز ثقل را بیابید.**

مثال: میله ای بطول 5cm در نظر بگیرید. که چگالی خطی آن به روی هر نقطه از میله متناسب تا انتهای میله باشد، مرکز ثقل آن را بیابید؟

$$\delta = k(5 - x)$$

مرکز ثقل صفحه همگن

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \ f(x)dx}{\int_a^b f \ (x) \ dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b f^2(x)dx}{2\int_a^b f(x)dx}$$

مثال: مرکز ثقل ورقه همگن محدود به منحنی زیر را بیابید.

$y^2 = 2x \qquad [\circ \quad 4]$

مثال: مرکز ثقل ورقه همگن محدود زیر محور **x=۴** ها را بیابید.

$$y = x^2 - 4x + 5$$

مثال: مرکز ثقل نیم دایرهٔ مرکزی به شعاع a بالای محور xها را بیابید.

مثال: مرکز ثقل ورقه همگن محدود به دو منحنی زیر را بیابید

$$y = x + 2 \quad , y = x^2$$

جمع بندی و نتیجه گیری

با تشکر